



日本物理学会 2013年秋季大会

2013年9月25日(水) – 9月28日(土) 徳島大学常三島キャンパス

磁気流体力学方程式に対する 衝撃波捕獲法の研究

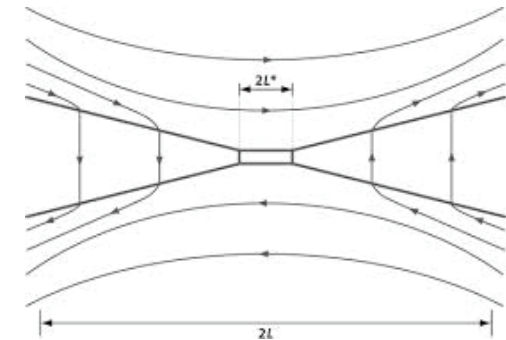
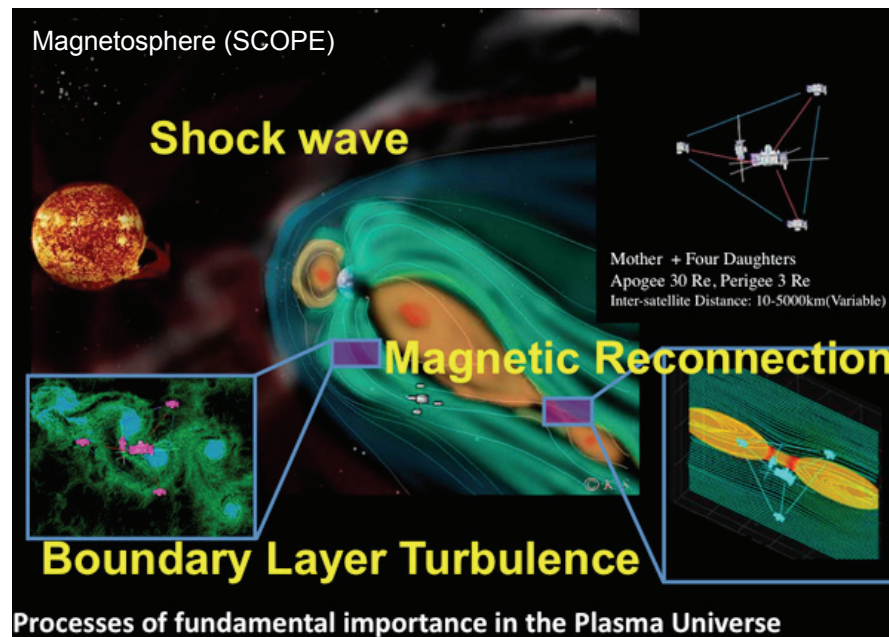
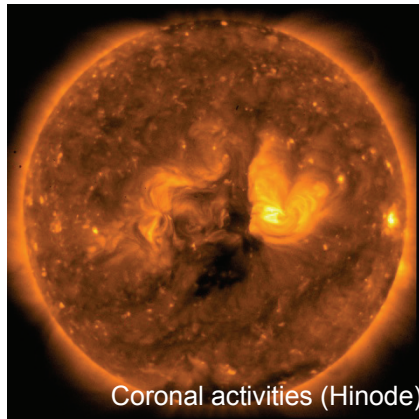
三好 隆博

広島大学大学院理学研究科

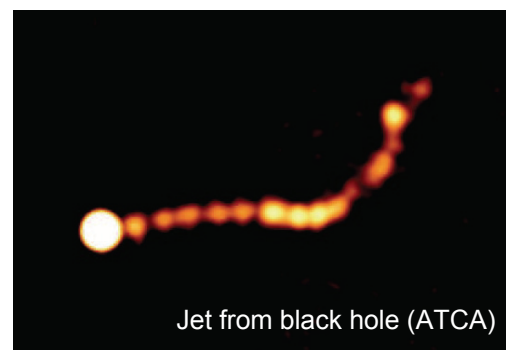
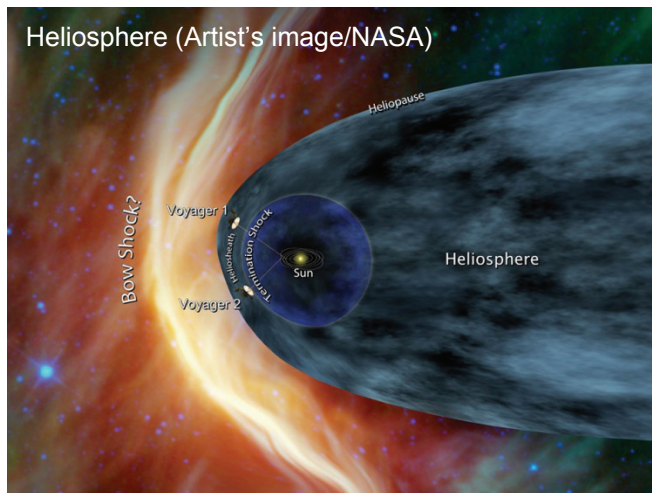
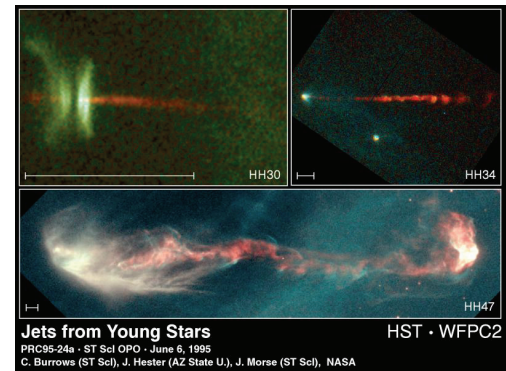
様々な衝撃波



様々なプラズマ衝撃波



Petschek-type reconnection



動機・目的

- (通常の)流体力学の極限的状态である衝撃波を数値シミュレーションによって再現するため衝撃波捕獲法が発達してきた。
- 一方、宇宙プラズマにおいて衝撃波などの不連続を含む構造は普遍的である。また、磁気流体力学(MHD)波で構成される様々な不連続が理論的に予測される。
- 本講演ではMHD方程式に対する衝撃波捕獲法研究の進展について発表者らの成果を中心に概観すると共に、MHD衝撃波捕獲法を用いた応用課題の事例を紹介する。

MHD方程式

□ 1次元理想MHD方程式(保存形式)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad B_x = \text{const.}$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ B_y \\ B_z \\ e \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p_T \\ \rho v u - B_x B_y \\ \rho w u - B_x B_z \\ B_y u - B_x v \\ B_z u - B_x w \\ (e + p_T)u - B_x (v B_y + w B_z) \end{pmatrix}$$

$$p_T = p + (B_y^2 + B_z^2 - B_x^2)/2$$

$$p = (\gamma - 1) \left(e - \rho(u^2 + v^2 + w^2)/2 + (B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)/2 \right)$$

$$\lambda_1 = u - c_f, \lambda_2 = u - c_a, \lambda_3 = u - c_s, \lambda_4 = u, \lambda_5 = u + c_s, \lambda_6 = u + c_a, \lambda_7 = u + c_f$$

衝撃波捕獲法

□ 保存型数値解法

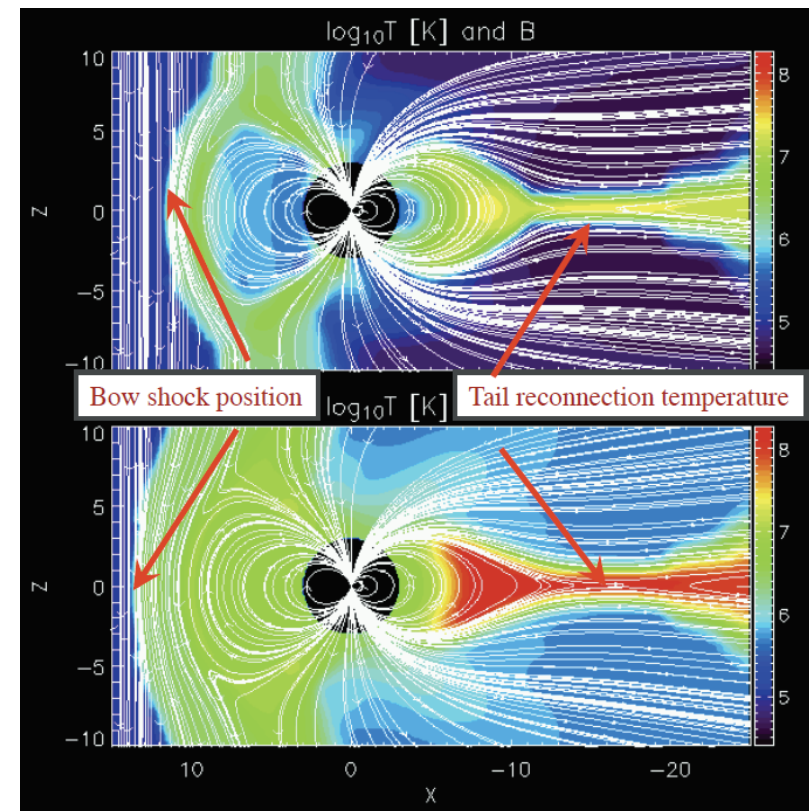
- 支配方程式が保存形式
- 物理的不連続解に収束
Lax-Wendroff [1960]
Harten [1980]
- 保存則を満足

- 正值性の保存が困難

□ 非保存型数値解法

- 支配方程式が非保存形式
- 非物理的不連続解に収束
Hou-LeFloch [1994]

Conservative vs Non-conservative



“Computational Tutorial: MHD” by G. Toth

http://www.lorentzcenter.nl/lc/web/2011/441/presentations/Advanced_Toht.pdf

衝擊波捕獲法

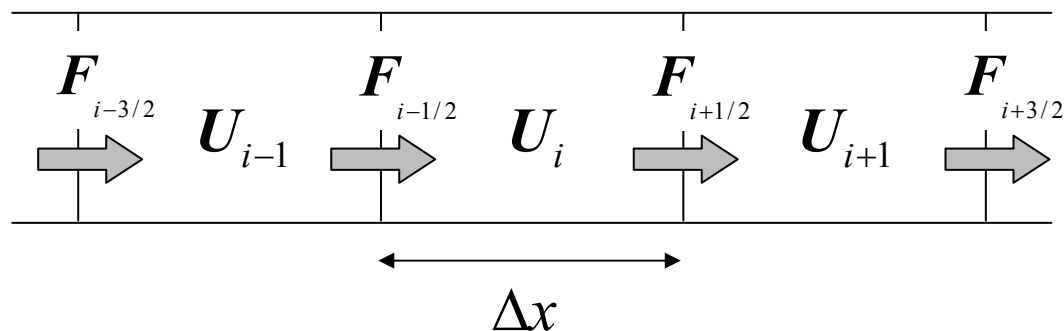
□ 保存型数值解法

- 有限差分法
- 有限要素法
- 有限体積法

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U dx + F(U(x_{i+1/2}, t)) - F(U(x_{i-1/2}, t)) = 0$$

$$\Delta x \frac{\Delta U_i}{\Delta t} + F_{i+1/2} - F_{i-1/2} = 0$$

$F_{i+1/2}$: 数值流束

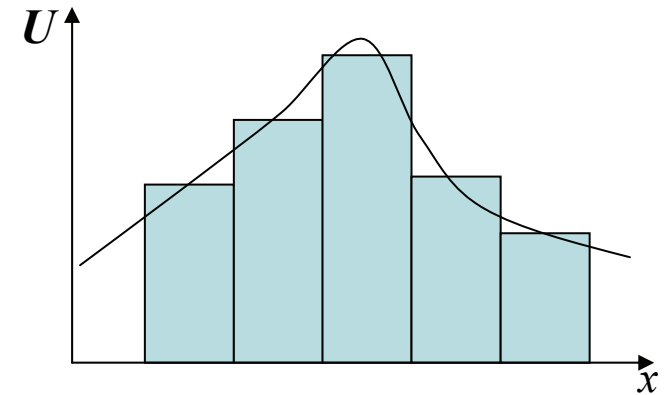


近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

■ 物理量分布を一定と仮定

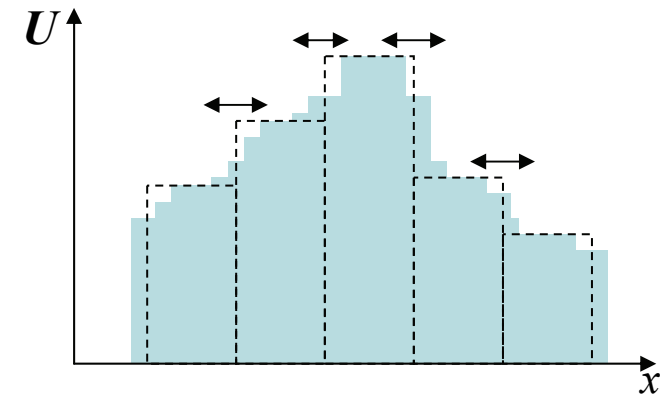


近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

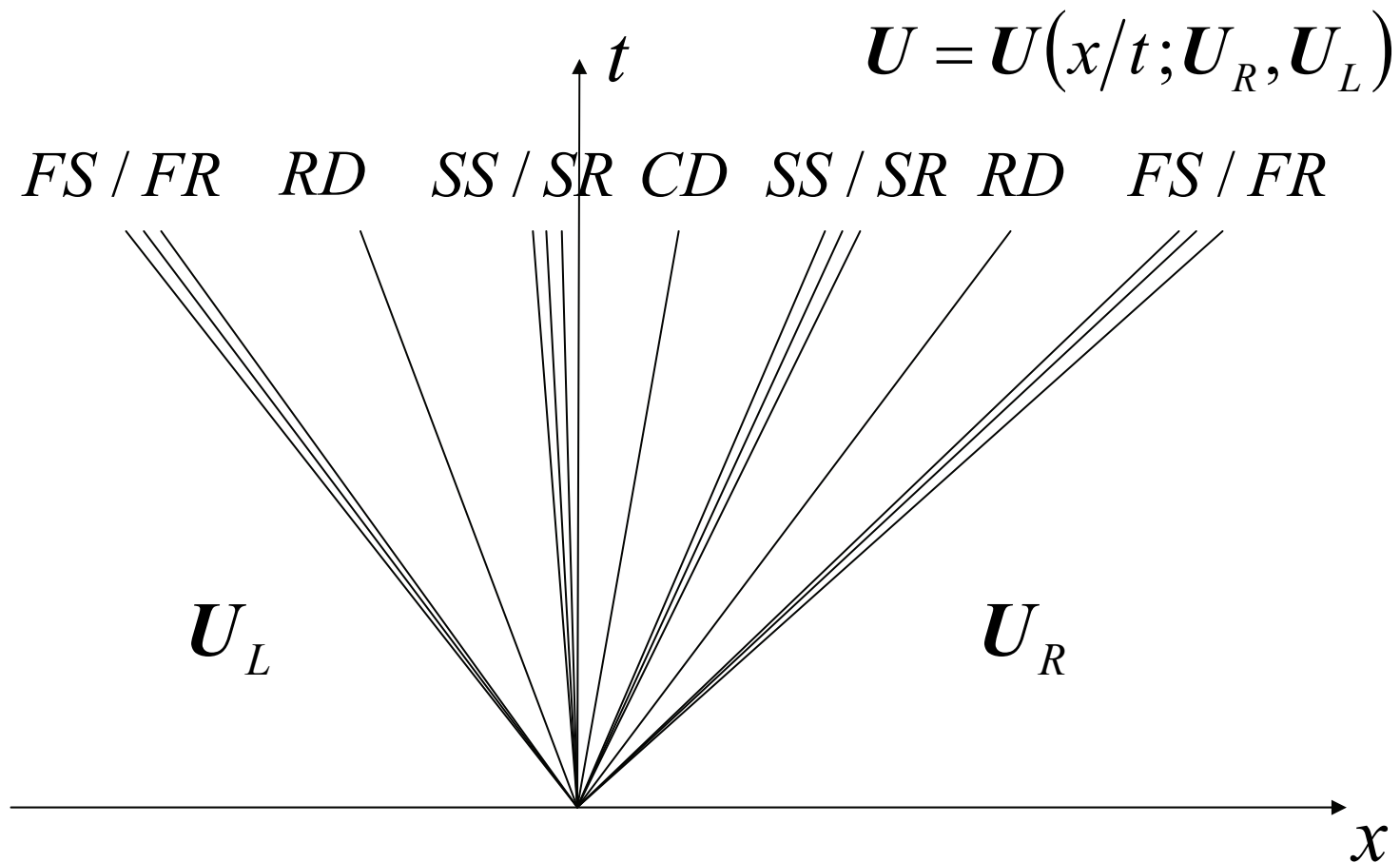
- 物理量分布を一定と仮定
- 各セル境界のリーマン問題



リーマン問題

□ リーマン問題＝衝撃波管問題

■ MHDでは7つの波に関する衝撃波・膨張波・混合波

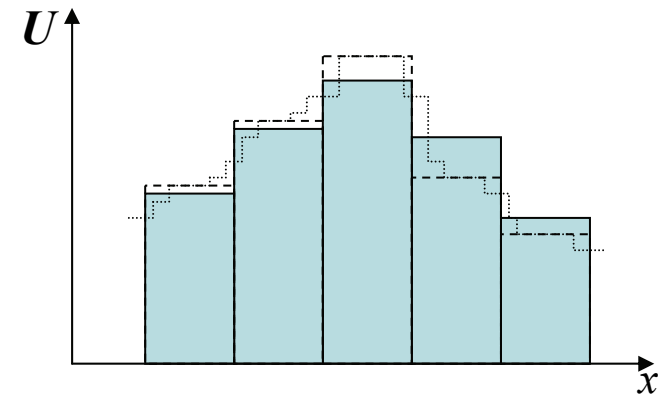


近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

- 物理量分布を一定と仮定
- 各セル境界のリーマン問題
- 厳密解・近似解の空間積分

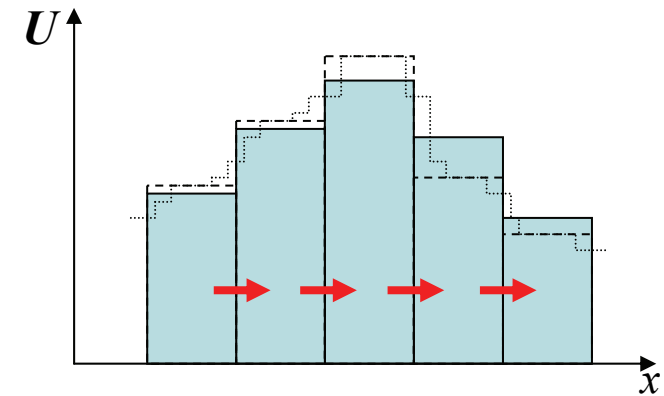


近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \right) dx dt = \oint (U dx - F dt) = 0$$

- 物理量分布を一定と仮定
- 各セル境界のリーマン問題
- 厳密解・近似解の空間積分
- 時空間保存則から数値流束を評価



$$\int_{x_i}^{x_{i+1/2}} U \left(\frac{x - x_{i+1/2}}{\Delta t}; U_i^n, U_{i+1}^n \right) dx - (x_{i+1/2} - x_i) U_i^n + \Delta t (\underline{F_{i+1/2}} - F_i^n) = 0$$

□ リーマン問題の解の品質が決め手！

近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法の開発小史

- Lax-Friedrichs法 [Lax, 1950's]

- Rusanov法 [Rusanov, 1961]

近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法の開発小史

- Lax-Friedrichs法 [Lax, 1950's]
- Godunov法(HD) [Godunov, 1959]
- Rusanov法 [Rusanov, 1961]
- Roe法(HD) [Roe, 1981]
- HLL法 [Harten+, 1983]

近似リーマン解法

□ 近似リーマン解法の開発小史

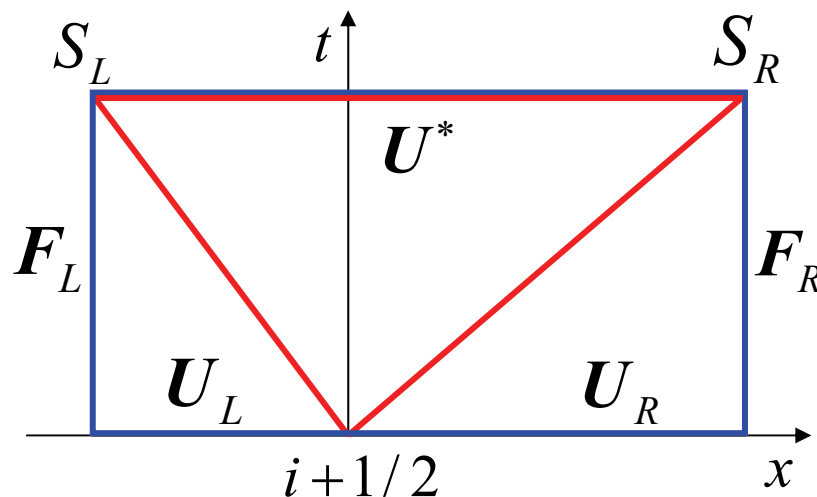
- Lax-Friedrichs法 [Lax, 1950's]
- Godunov法(HD) [Godunov, 1959]
- Rusanov法 [Rusanov, 1961]
- Roe法(HD) [Roe, 1981]
- HLL法 [Harten+, 1983]
- Roe法(MHD) [Brio+, 1988]
- HLLC法(HD) [Toro+, 1994; Batten+, 1997]
- HLLC法(MHD) [Gurski, 2004; Li, 2005]
- HLLD法(MHD) [Miyoshi+, 2005]

HLL近似リーマン解法

□ HLL近似リーマン解法 [Harten+, 1983]

■ 非線形保存則

■ 2-wave近似



$S_{R,L}$: 最大/最小情報伝播速度

$$S_R = \max(u_L + c_L, u_R + c_R, 0)$$

$$S_L = \min(u_L - c_L, u_R - c_R, 0)$$

$$\oint (U dx - F dt) = 0 \Rightarrow (S_R - S_L)U^* + S_R U_R - S_L U_L + F_R - F_L = 0$$

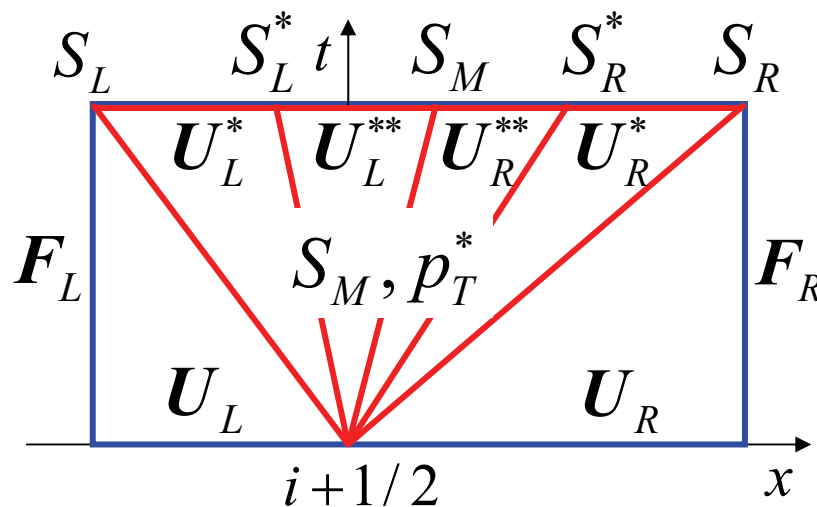
内部構造は単一状態: 接触不連続など低解像度

HLLD近似リーマン解法

□ HLLD近似リーマン解法 [Miyoshi+, 2005]

■ 非線形保存則

■ 5-wave近似



$S_{R,L}$: 速い磁気音波

S_M : エントロピー波

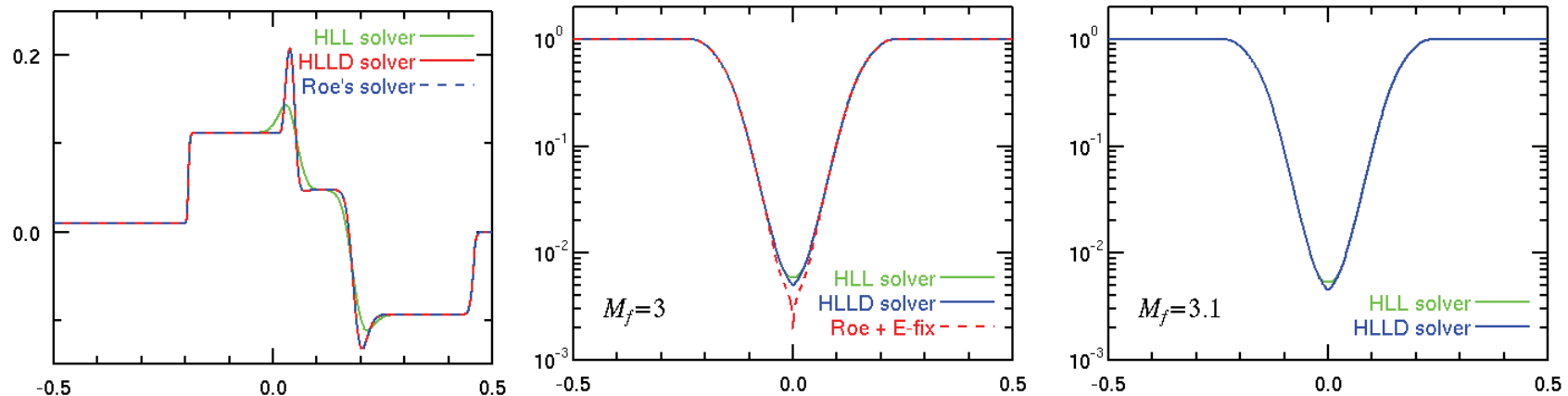
$S_{R,L}^*$: アルフェン波

$$S_{R,L}(U_{R,L}^* - U_{R,L}) = F_{R,L}^* - F_{R,L}, \quad S_{R,L}^*(U_{R,L}^{**} - U_{R,L}^*) = F_{R,L}^{**} - F_{R,L}^*,$$

$$S_M(U_R^{**} - U_L^{**}) = F_R^{**} - F_L^{**}, \quad \frac{1}{\Delta t} \int_{S_L \Delta t}^{S_R \Delta t} U(x, t^{n+1}) dx + S_R U_R - S_L U_L + F_R - F_L = 0$$

HLLD近似リーマン解法

□ 高解像度・高計算効率・ロバスト性（正値性を証明！）



□ 天文MHD業界のほぼ世界標準

Table 2
Solver Design Specifications for the Eulerian Methods^a

Name	Base Scheme ^b	Spatial Order ^c	Source Terms ^d	MHD ^e	Time Integration ^f	Directional Splitting ^g
ENZO	FV, HLL	Second	Dedner	Dedner	Second-order RK	Direct
FLASH	FV, HLLD	Second	Derivative	Third-order CT	Forward Euler	⊥ Reconstruction
KT-MHD	FD, CWENO	Third	KT	Third-order CT	Fourth-order RK	Direct
LL-MHD	FV, HLLD	Second	None	Athena CT	Forward Euler	Split
PLUTO	FV, HLLD	Third	Powell	Powell	Fourth-order RK	Direct
PPML	FV, HLLD	Third	None	Athena CT	Forward Euler	⊥ Reconstruction
RAMSES	FV, HLLD	Second	None	2D HLLD CT	Forward Euler	⊥ Reconstruction
STAGGER	FD, Stagger	Sixth	Tensor	Staggered CT	Third-order Hyman	Direct
ZEUS	FD, van Leer	Second	von Neumann	MOC-CT	Forward Euler	Split

Notes.

^a See Section 3 and the indicated sections on each topic for more information.

^b Base method. FD for finite difference, FV for finite volume. FV techniques have the Riemann solver listed, Section 6.3.

^c Spatial order of accuracy, Section 6.1.

^d Artificial Viscosity, Section 6.2. “Derivative” indicates presence of terms proportional to the longitudinal derivative of the magnetic field.

^e MHD method, Section 6.4.

^f Time integration method, Section 6.6.3.

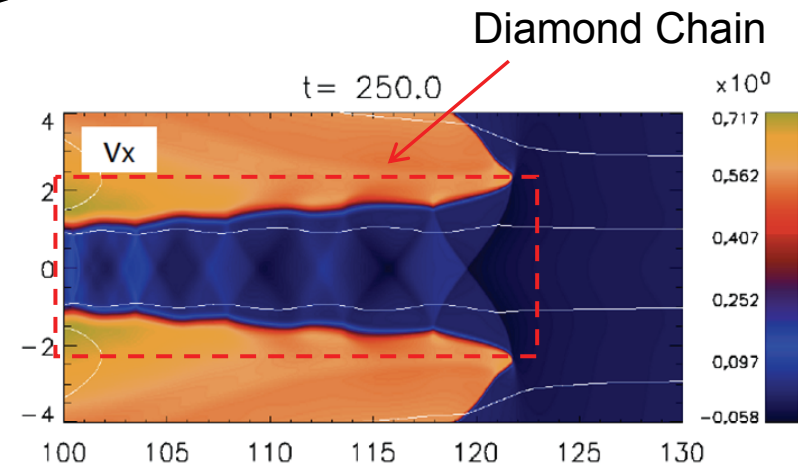
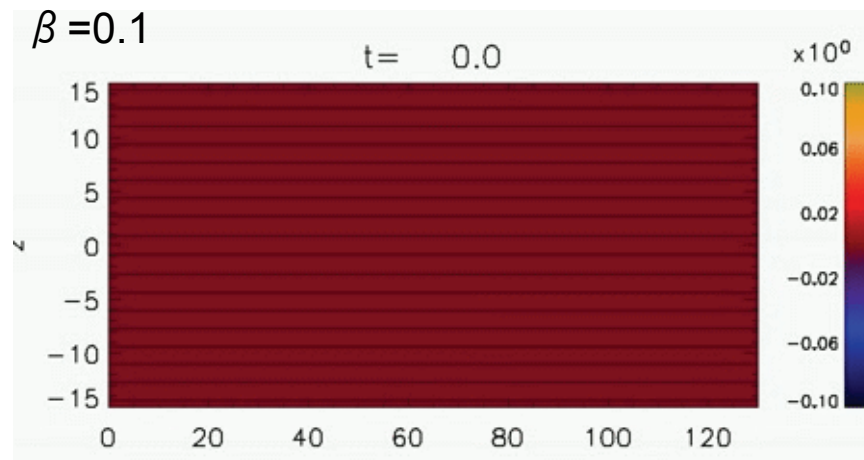
^g Multidimensional technique, Section 6.6.2. “⊥ Reconstruction” indicates presence of transverse derivatives in the interface reconstruction.

A.G. Kritsuk+,
ApJ, 773:13, 2011

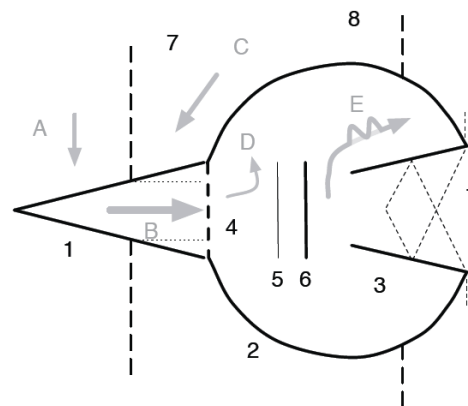
日本においても、
千葉大学松元G
はじめ多数利用

MHD衝撃波捕獲法の適用事例

□ Low- β 高速磁気リコネクション

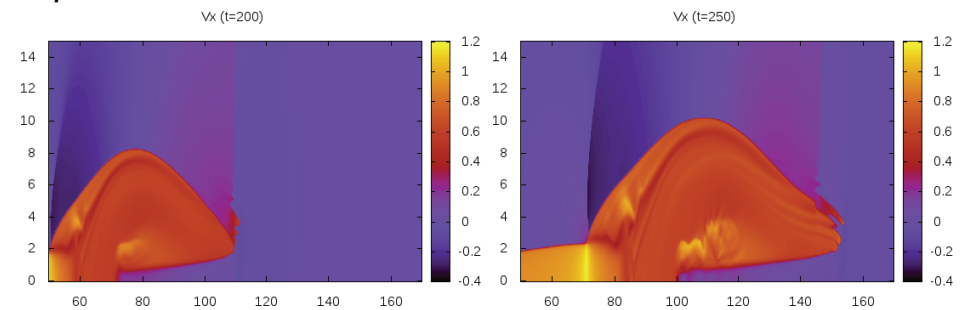


[Zenitani+, 2011]



1. Petschek SS
2. outer shell (SS)
3. IS or SS
4. FS
5. Loop-top front
6. TD
7. post-plasmoid SS
8. outer vertical SS
9. fast wave front
10. shock-reflection

$\beta = 0.5$

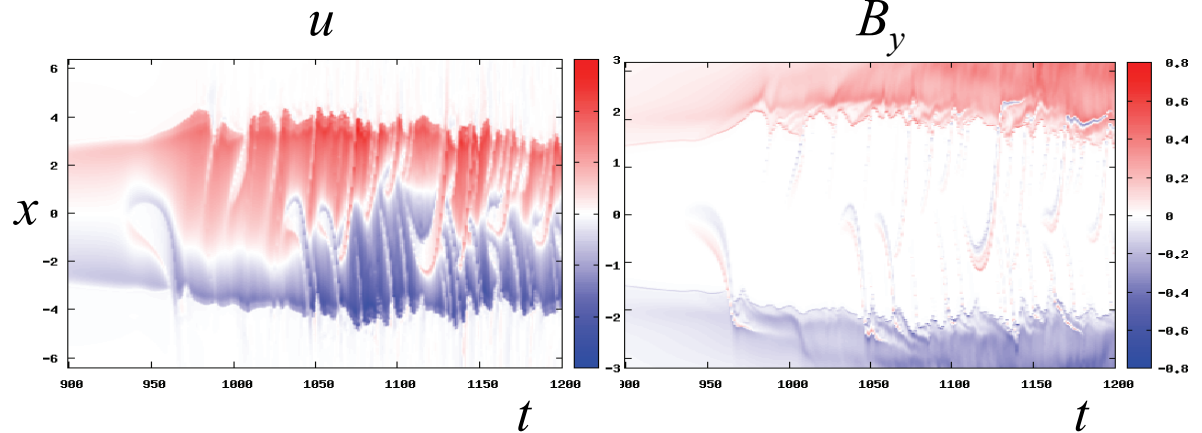
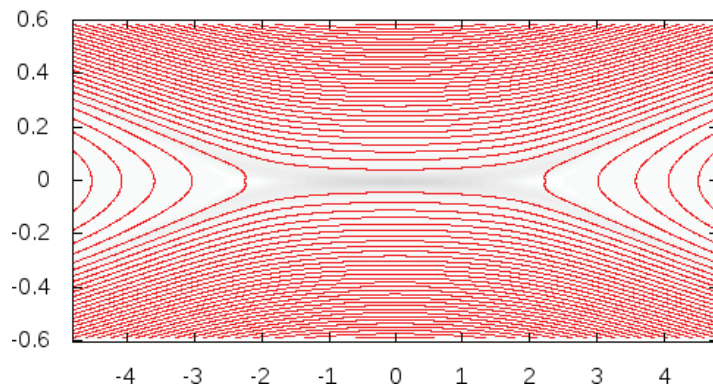


[Miyoshi+]

MHD衝撃波捕獲法の適用事例

□ High-Sテアリング不安定性

magnetic field lines of force (t=0800)



[Miyoshi+]

電流

圧力

磁場

Reconnected flux



[Nakabou+]

HLLD近似リーマン解法の展開

□ MHD方程式の拡張

- 等温MHD方程式 [Mignone, 2007]
- 相対論的MHD方程式 [Mignone, 2008]
- 背景ポテンシャル磁場を除去した / 一般化状態方程式を持つ / 多成分のMHD方程式 [Miyoshi+, 2010]
- Boris修正MHD方程式
- ラグランジュ質量座標系におけるMHD方程式

□ HLLD近似リーマン解法の拡張

- カーバンクルフリーHLLD近似リーマン解法
 - HLLD⁻法 (contact-preserving)
 - HLLD⁺法 (contact-and-rotational-preserving)

まとめ

- MHD方程式に対する衝撃波捕獲法の研究開発の動機および現状(のほんの一部)について報告した。
 - HLLD近似リーマン解法が天文MHD業界を中心に標準解法として導入
 - 多次元化について様々な技法の比較研究が必要
 - 数値的磁気単極子の除去 [Miyoshi+, 2010]
 - カーバンクル現象などの除去
 - 高次精度化の検討も必須
 - MUSCL, ENO/WENO, WCNS, DG, ...
- MHD衝撃波捕獲法の適用事例を紹介した。
 - プラズマ中において不連続は遍く存在