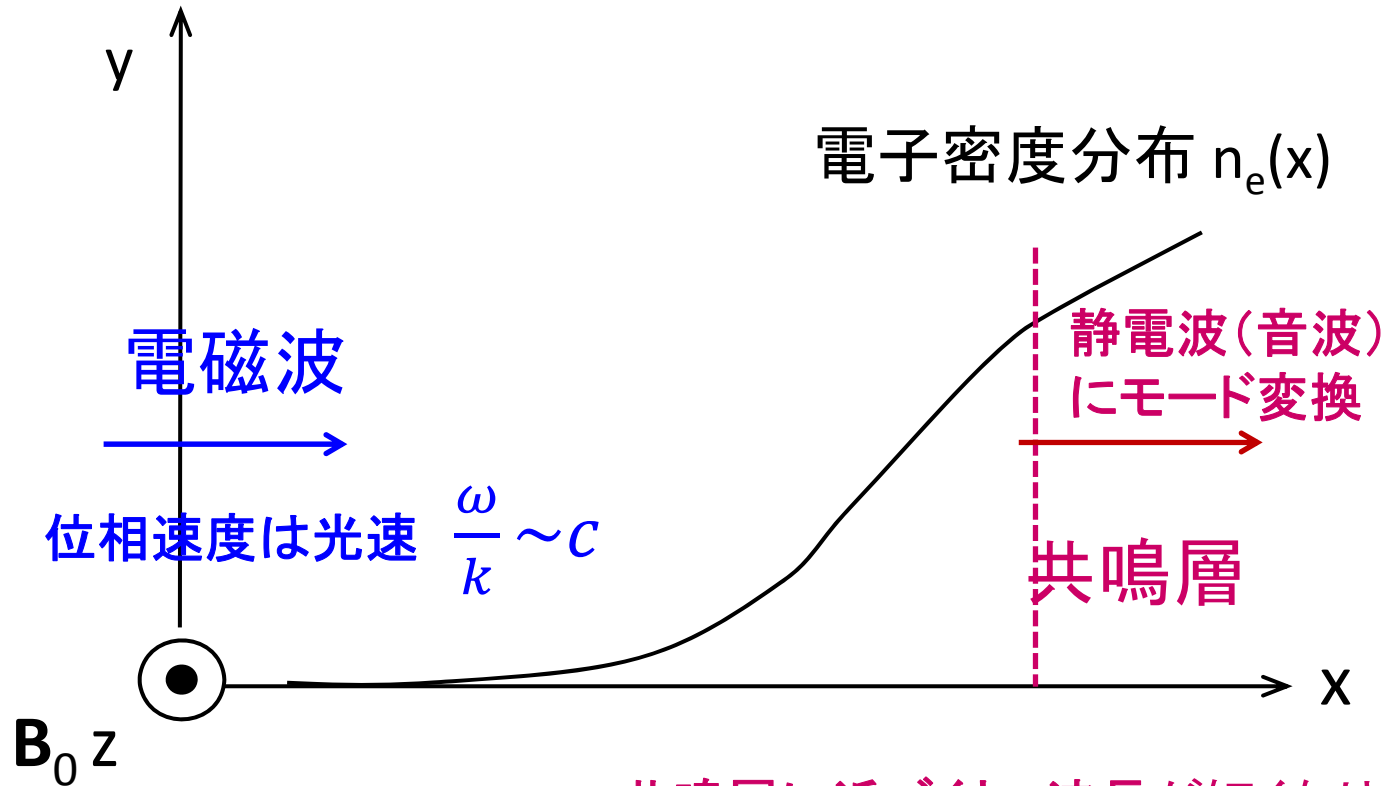


2013年秋季大会(徳島大学常三島キャンパス)26aKC-2

プラズマ波動とモード変換の物理

京都大学エネルギー科学研究科 前川 孝

プラズマに一定周波数の電磁波を入射する



共鳴層に近づくと、波長が短くなり
位相速度は熱速度に近づく

$$\frac{\omega}{k} \sim V_{thermal}$$

入射から共鳴層付近まで位相速度が熱速度より十分大きい範囲では冷たいプラズマ近似により波動を解析できる。

アルフベン共鳴、低域混成共鳴、高域混成(UH)共鳴

$$\omega_A = \Omega_i \sqrt{\frac{k_{//}^2 c^2}{k_{//}^2 c^2 + \omega_{pi}^2}}, \quad \omega_{LH} = \sqrt{\frac{\Omega_i^2 + \omega_{pi}^2}{1 + \omega_{pe}^2 / \Omega_e^2}}, \quad \omega_{UH} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \Omega_e^2}$$

電子サイクロトロン周波数帯の波動は高域混成共鳴層で電子バーンスタイン(EB)波にモード変換する
この周波数帯ではイオンの応答は無視でき、
電子の応答のみを考慮する。
以下この場合について述べる。

波動方程式

マックスウェルの方程式 $\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ $\text{rot}\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$

波動は一定周波数 ω を持つ定常高周波源により駆動される

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)$$

複素振幅(位置 \mathbf{r} の関数)

電流密度は電場に比例

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)$$

$\vec{\sigma}$: 電気伝導率テンソル

波動方程式

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = k_0^2 \vec{K} \cdot \mathbf{E}$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c} : \text{自由空間波数} \quad \vec{K} = \vec{I} + \frac{i}{\omega\epsilon_0} \vec{\sigma} : \text{誘電率テンソル}$$

静磁場中($B_0\hat{z}$)の冷たいプラズマ近似での運動方程式
(波動の位相速度が粒子の熱速度より十分大きい場合に有効)

$$m_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} = q_e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times B_0\hat{z}) - \nu m_e \mathbf{u}_e$$

\mathbf{u}_e : 波動で駆動される流体速度

ν : 衝突周波数 $\nu/\omega \lll 1$ である衝突により強制振動解のみが残る。これを用いて電気伝導率テンソルを得る。

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = n_e q_e \mathbf{u}_e(\mathbf{r}, t) = \vec{\sigma} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)$$

冷たいプラズマ近似

$$\text{誘電率テンソル } \vec{K}_c = \begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

参照:
“Waves in Plasmas”
by T H Stix

$$S = (R + L)/2 \quad D = (R - L)/2$$

$$R = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega^* + \Omega)} \quad L = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega^* - \Omega)}$$

$$P = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^* \omega} \quad \omega^* = \omega + i\nu$$

$$\Omega = \frac{q_e B_0}{m_e} \quad : \text{電子サイクロトロン周波数}$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e q_e^2}{m_e \epsilon_0}} \quad : \text{電子プラズマ周波数}$$

一様な冷たいプラズマ中の波動

非常に大きく一様なプラズマ中の平面波

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B} \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

↖ 複素定振幅(位相を含む) ↗

波動方程式

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{E}) = k_0^2 \vec{K} \cdot \mathbf{E}$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c} : \text{自由空間波数} \quad \vec{K} = \vec{I} + \frac{i}{\omega \epsilon_0} \vec{\sigma} : \text{誘電率テンソル}$$

$$\mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{E}) + \vec{K}_c \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{N} = \mathbf{k}/k_0 : \text{屈折率ベクトル}$$

一様な冷たいプラズマ中の波動

波動方程式

$$\begin{pmatrix} S - N^2 \cos^2 \theta & -iD & N^2 \cos \theta \sin \theta \\ iD & S - N^2 & 0 \\ N^2 \cos \theta \sin \theta & 0 & P - N^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0$$

分散式

$$AN^4 - BN^2 + C = 0$$

$$A = S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta$$

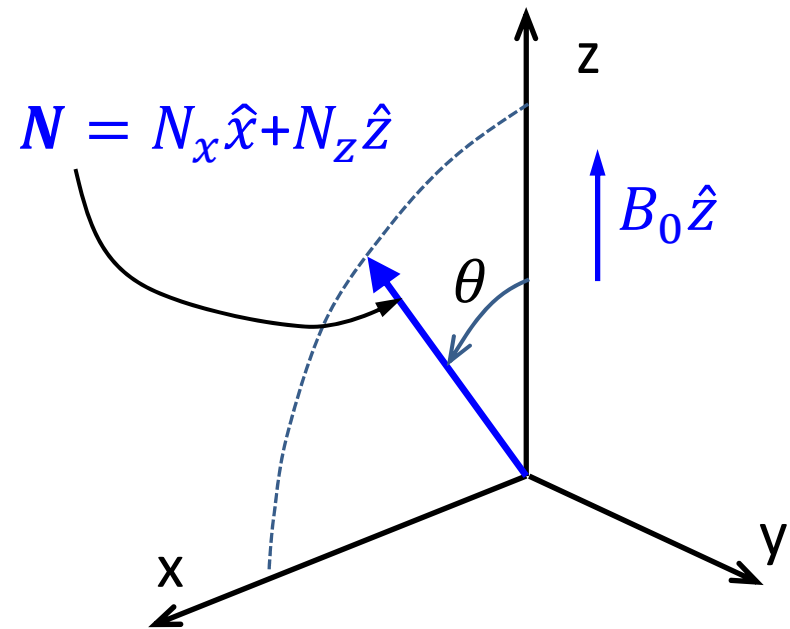
$$B = RL \sin^2 \theta + PS(1 + \cos^2 \theta)$$

$$C = PRL$$

$$N^2 = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

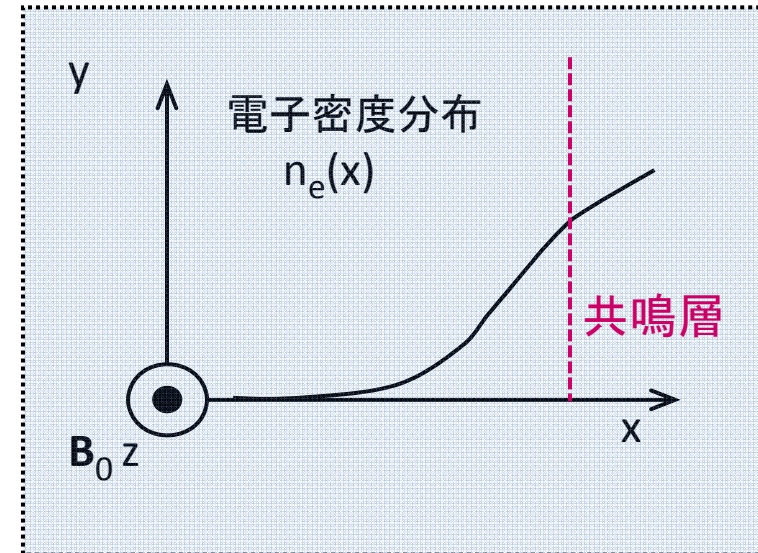
$$= f\left(\theta, \frac{\Omega}{\omega}, \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

$N^2 > 0$ のとき伝播モード



プラズマスラブ中の波動伝播（冷たいプラズマ近似）

密度がx方向に増大。
z方向とy方向には一様。
プラズマ表面から波動を送り込む。
伝播に際し、磁場($B_0 \hat{z}$)方向の屈折率 N_z は保存する。



分散式

$$N^2 = N_x^2 + N_z^2 \quad N_z = N \cos \theta$$

を用いて

$$AN^4 - BN^2 + C = 0$$

$$A = S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta$$

$$B = RL \sin^2 \theta + PS(1 + \cos^2 \theta)$$

$$C = PRL$$

を整理する

$$aN_x^4 - b N_x^2 + c = 0$$

$$a = S \quad b = RL + PS - N_Z^2(P + S) \quad c = P(R - N_Z^2)(L - N_Z^2)$$

$$N_x^2 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

* $a = S \rightarrow 0$ のとき $N_x^2 \rightarrow \infty$ (共鳴)

* $N_x^2 = 0$ (遮断) のとき $c = P(R - N_Z^2)(L - N_Z^2) = 0$

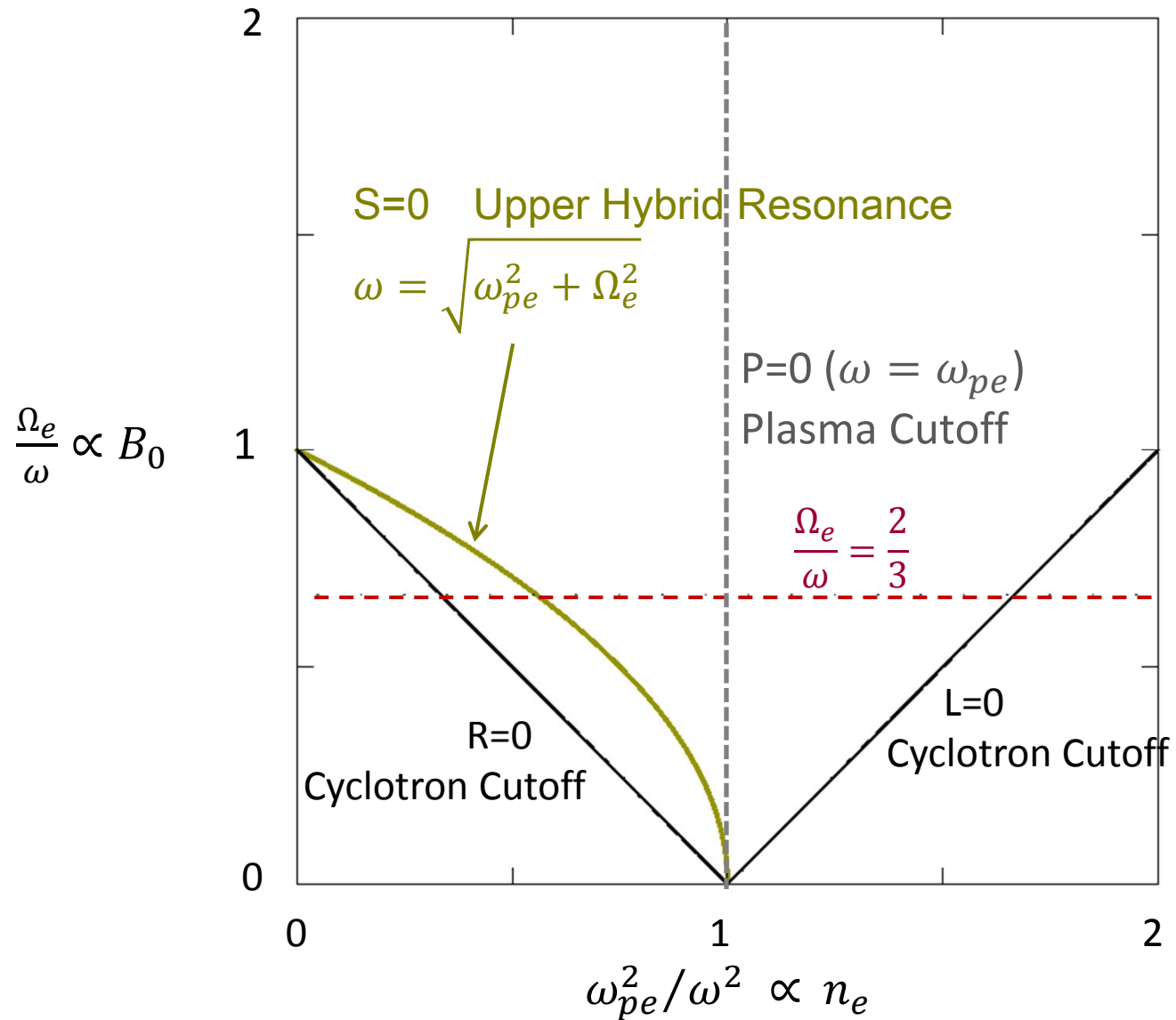
$$P = 0, \quad R = N_Z^2, \quad L = N_Z^2$$

* $N_Z = 0$ のとき

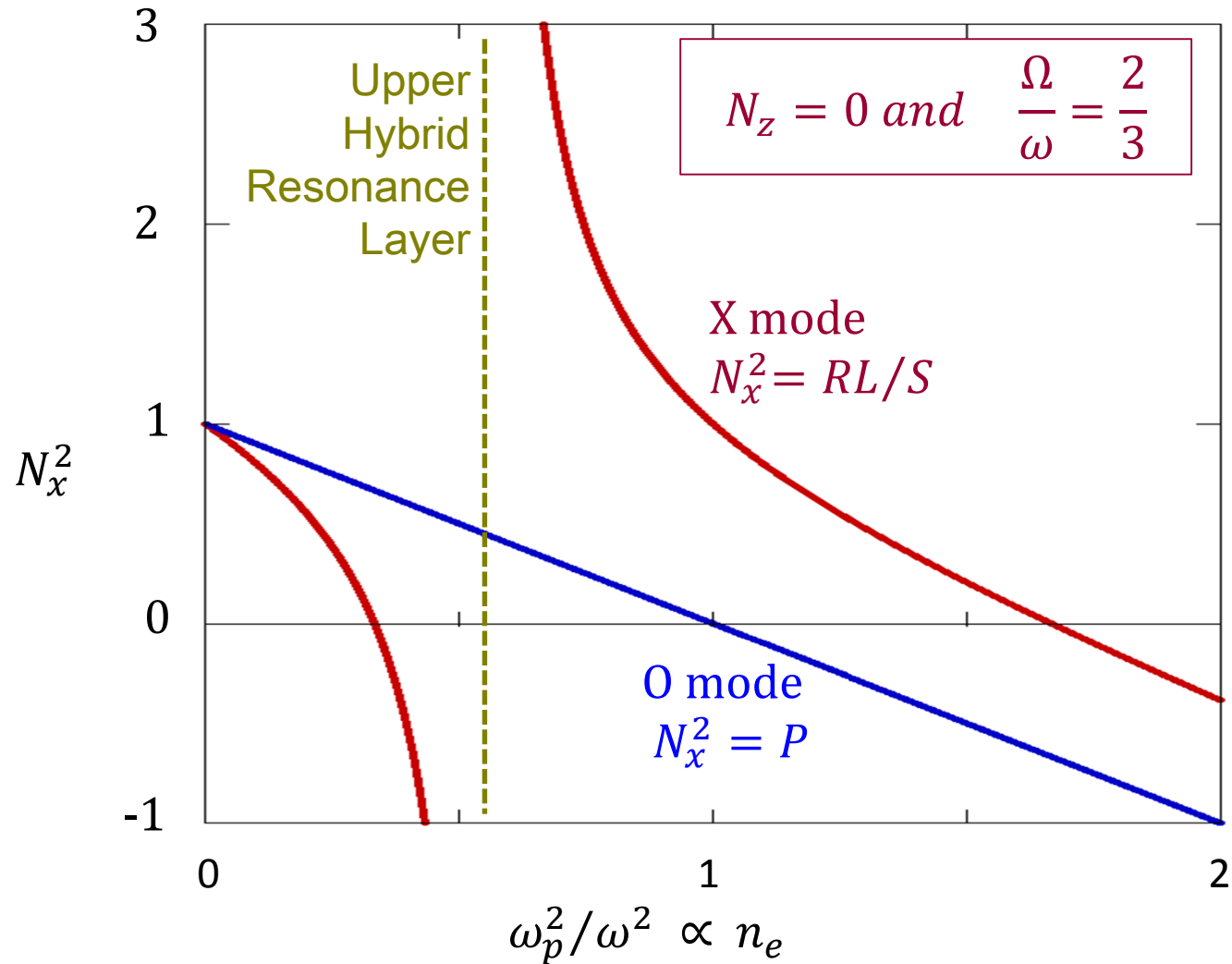
$$SN_x^4 - (RL + PS)N_x^2 + PRL = (N_x^2 - P)(SN_x^2 - RL) = 0$$

$N_x^2 = P$ (O波) ; $N_x^2 = RL/S$ (X波: 電子バーンスタイン波と結合)

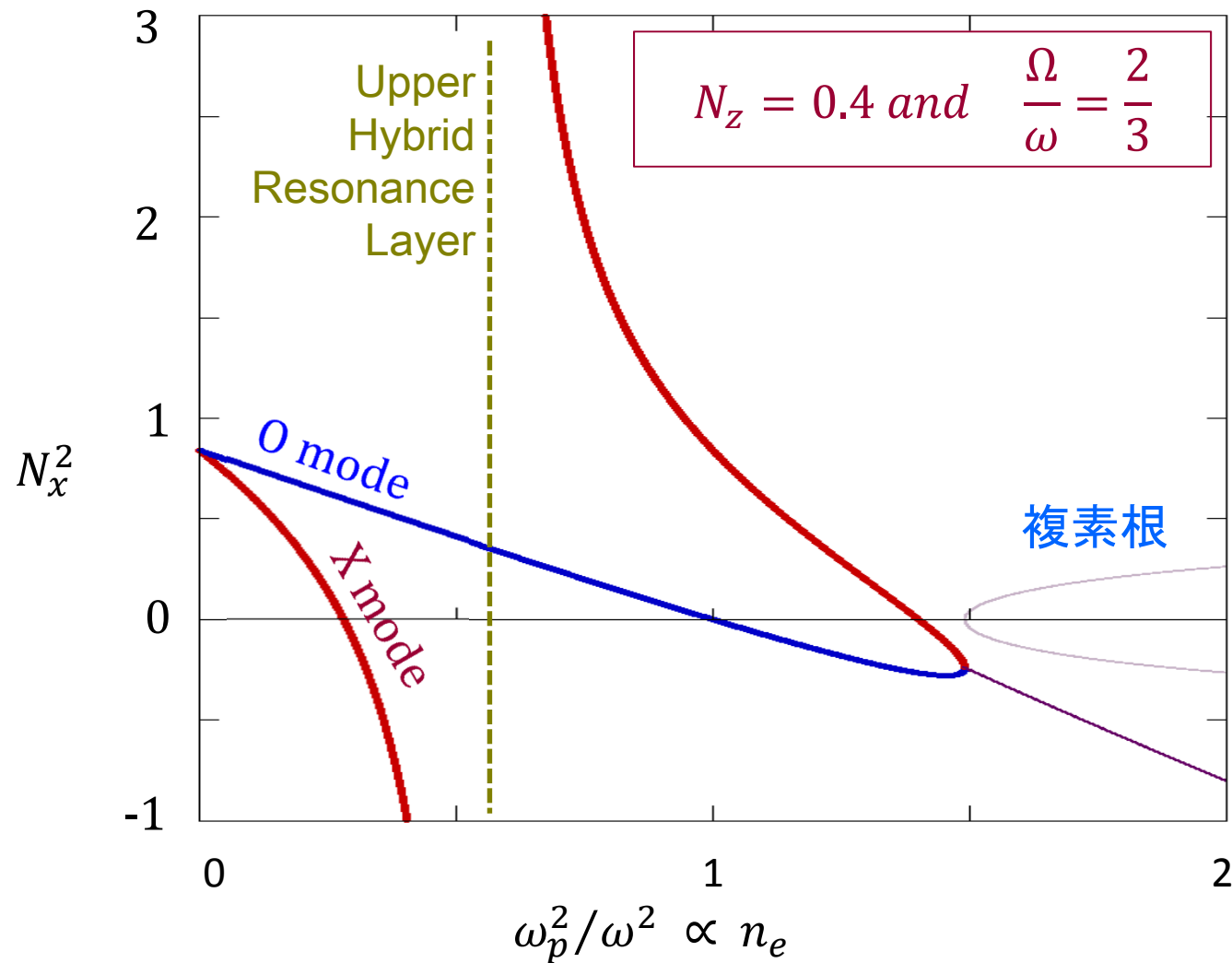
CMA diagram for EC waves ($N_z = 0$)



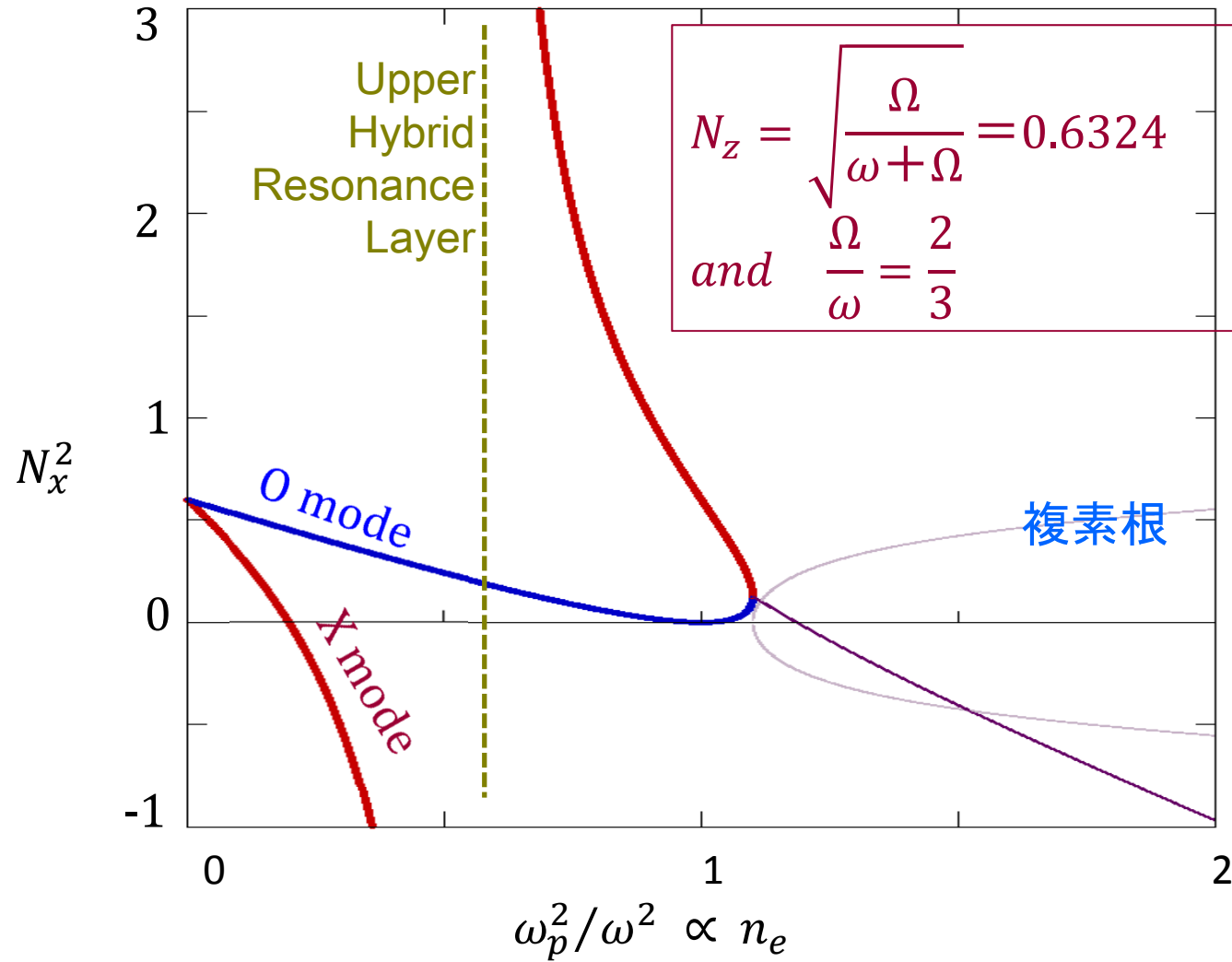
Perpendicular Refractive Index versus Density



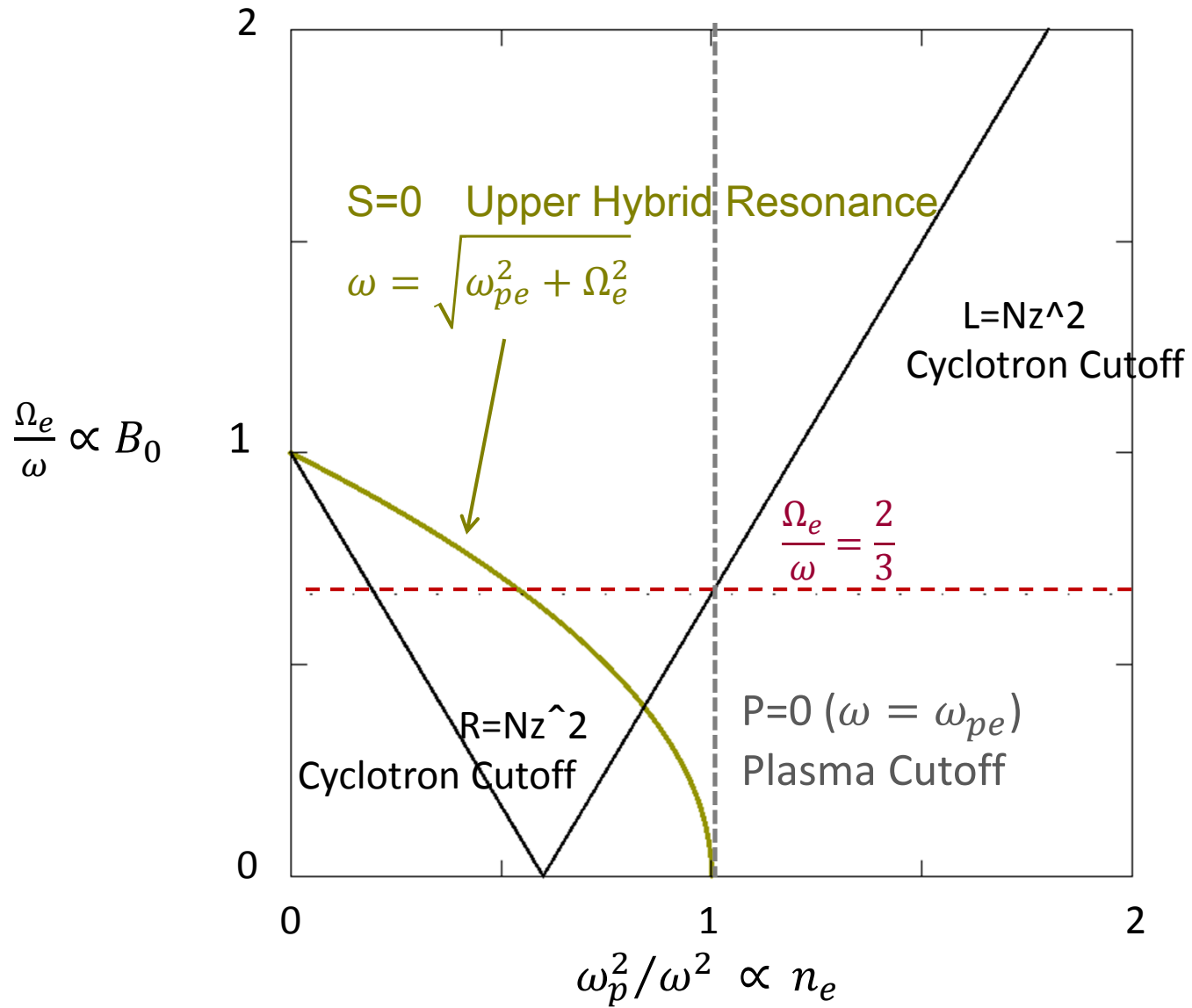
N_z があるとXモードとOモードは結合する



OXB法の場合



OXB法の場合



透過、反射、吸収については微分方程式を用いて解析

垂直伝播の場合を解析する

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(x) \exp(-i\omega t) \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}(x) \exp(-i\omega t)$$

波動方程式に代入

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{E}) = k_0^2 \vec{K} \cdot \mathbf{E}$$

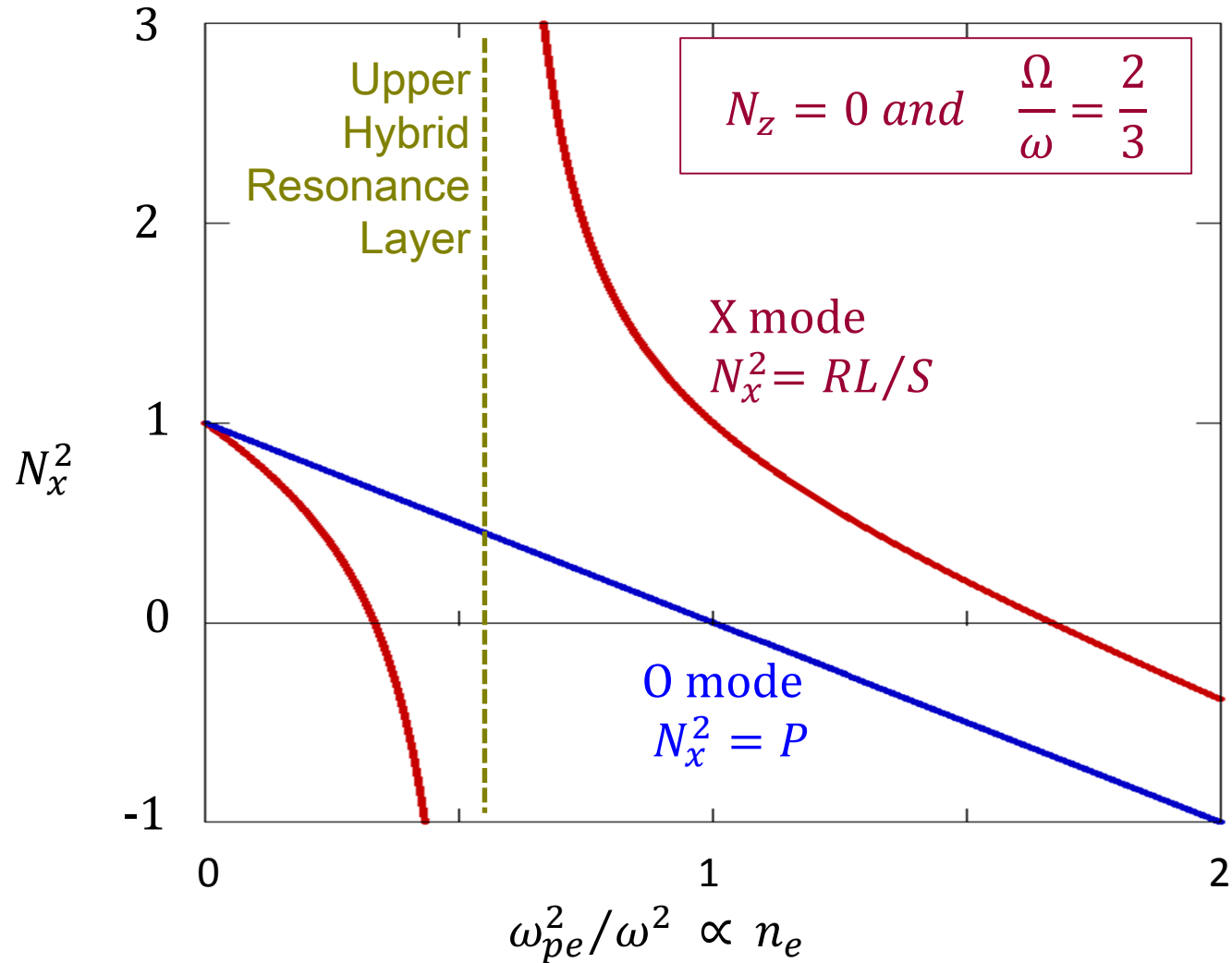
$$k_0 = \frac{\omega}{c} : \text{自由空間波数} \quad \vec{K} = \vec{I} + \frac{i}{\omega \epsilon_0} \vec{\sigma} : \text{誘電率テンソル}$$

Xモードの波動方程式

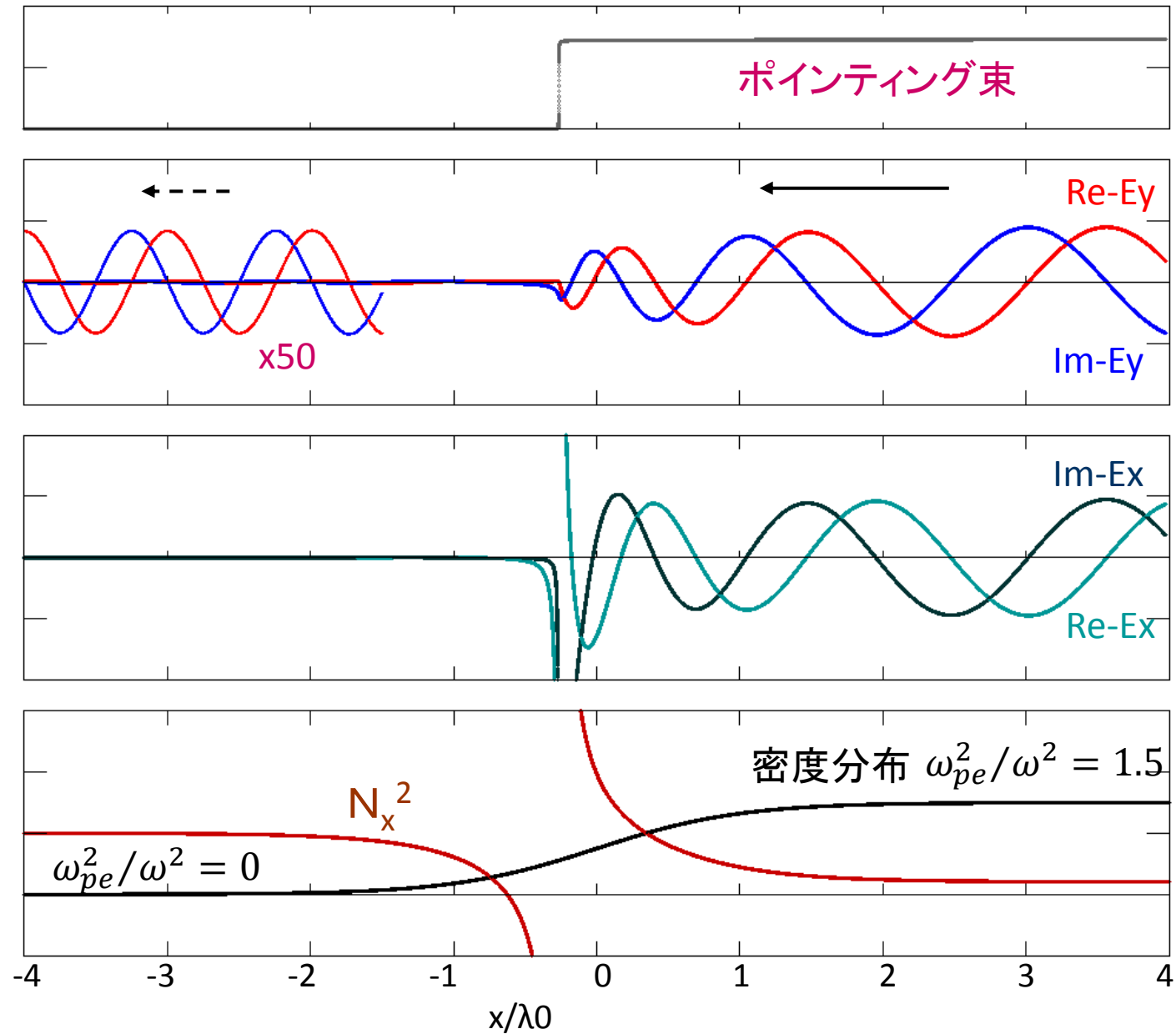
$$\text{X成分:} \quad 0 = K_{xx} E_x + K_{xy} E_y$$

$$\text{Y成分:} \quad -\frac{d^2}{d\xi^2} E_y = K_{yx} E_x + K_{yy} E_y \quad : \xi = k_0 x$$

Perpendicular Refractive Index versus Density

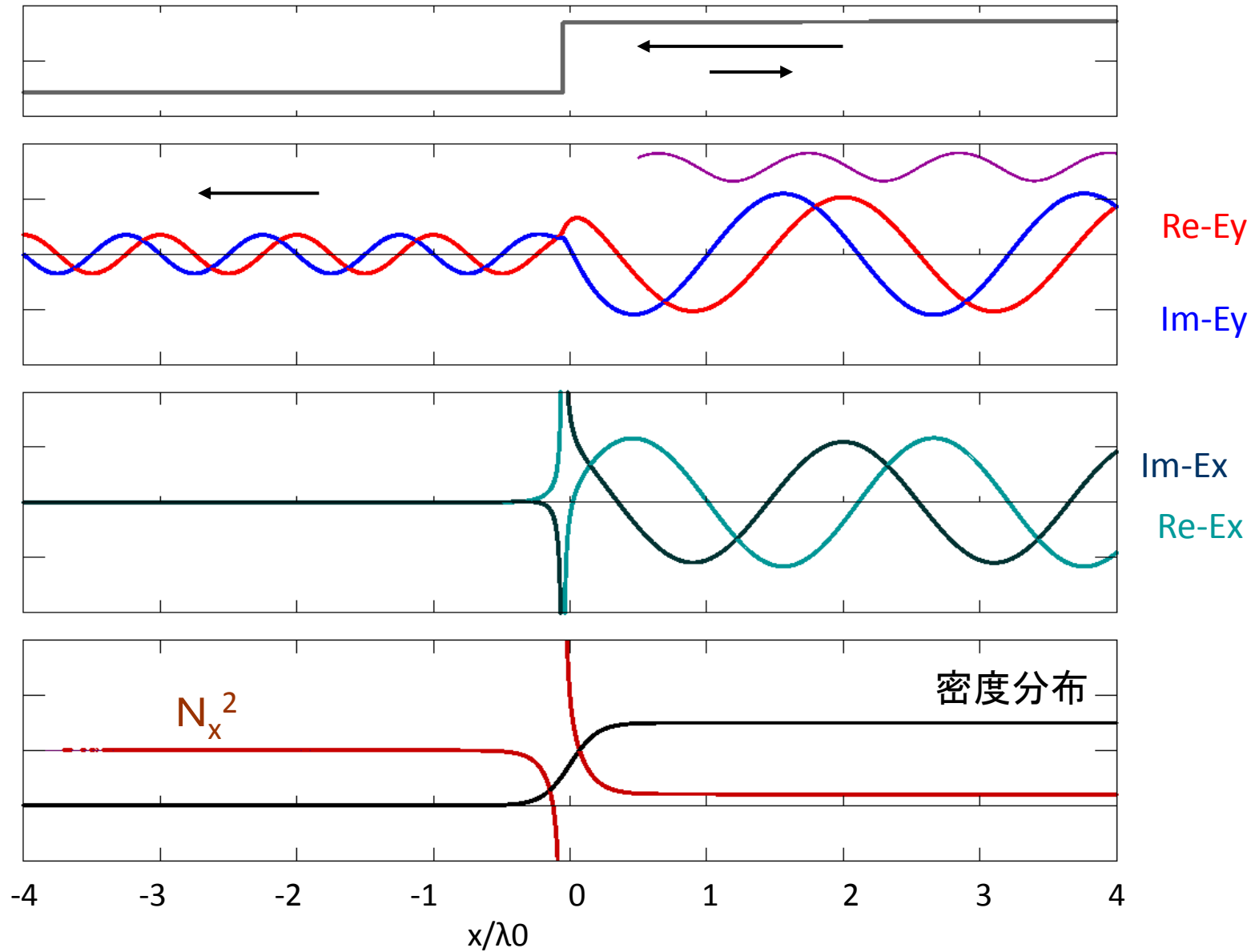


密度勾配が緩やかだと全電力はUH共鳴層で吸収

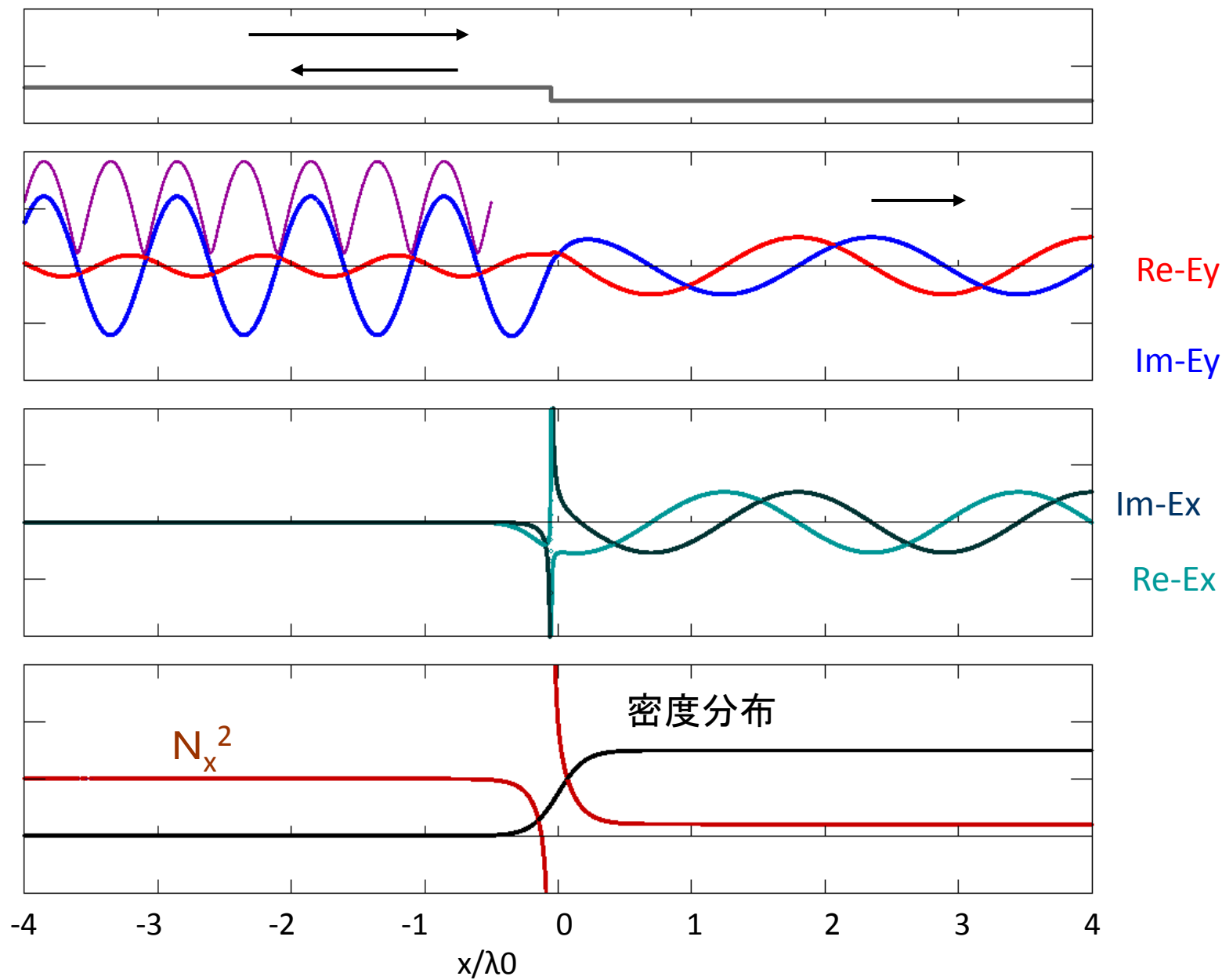


beta= 0.66667 alp0= 1.50000 Xaxis expansion rate= 1.0
Ln/rmd0= 0.20 nz= 0.00000 coll-freq/wave-freq = 0.00020

密度勾配を急峻にすると反射と透過が生じる



真空側から入射



有限ラーマー半径の効果 を一次のオーダーまで考慮した近似

Xモードの波動方程式

$$X \text{成分: } 0 = K_{xx} E_x - \frac{d}{d\xi} \left(\chi \frac{d}{d\xi} E_x \right) + K_{xy} E_y$$

$$Y \text{成分: } -\frac{d^2}{d\xi^2} E_y = K_{yx} E_x + K_{yy} E_y \quad : \xi = k_0 x$$

$$\chi = \frac{-3\omega_p^2 \omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)(\omega^2 - 4\Omega^2)} \left(\frac{v_t}{c} \right)^2 \quad v_t = \sqrt{\frac{T_e}{m_e}}$$

一様なプラズマ中では $E_x(x) = E \exp(iN_x \xi)$

電子バーンスタイン(EB)波の分散式

本質的に静電波だから

$$\text{div } \mathbf{D} = 0$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{K}^{hot} \cdot \mathbf{E}$$

複素定振幅(位相を含む)

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi = -i\mathbf{k}\phi \quad \phi(\mathbf{r}, t) = \phi \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t))$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{k} \cdot \varepsilon_0 \mathbf{K}^{hot} \cdot \mathbf{E} = -i\varepsilon_0 \phi \mathbf{k} \cdot \mathbf{K}^{hot} \cdot \mathbf{k} = 0$$

すなわち静電波近似の分散式は

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{K}^{hot} \cdot \mathbf{k} = 0$$

\mathbf{K}^{hot} をもとめることに帰着される。

参照:

“Waves in Plasmas”
by T H Stix

X-MODE and Electron Bernstein Wave Dispersion at Slightly Oblique Propagation

$(\omega_p/\omega_c)^2 = 1.8$

$k_{\parallel}\rho_e = 0.0080$

$c/v_t = 150.0$

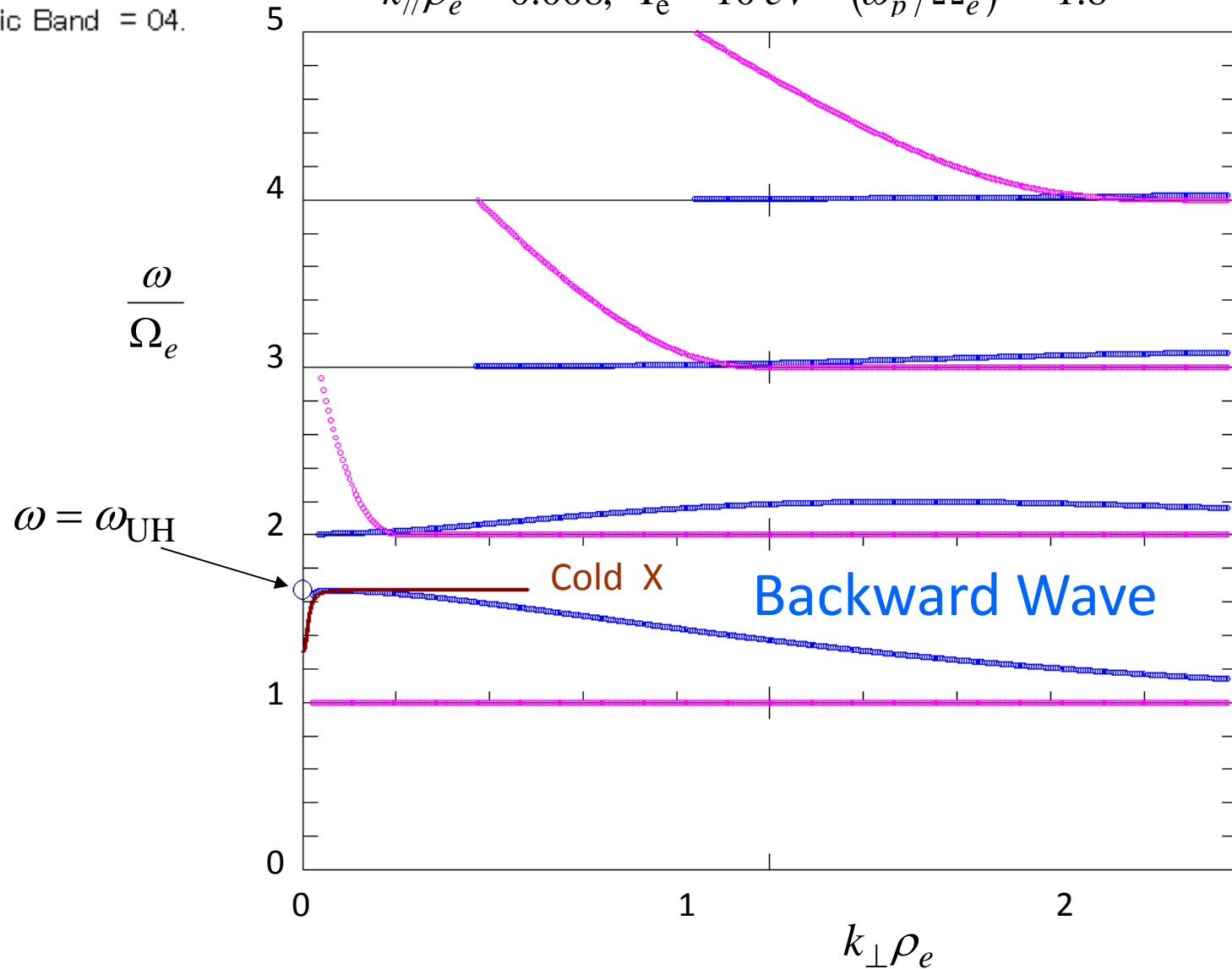
Max of $k_{\perp}\rho_e = 2.0$

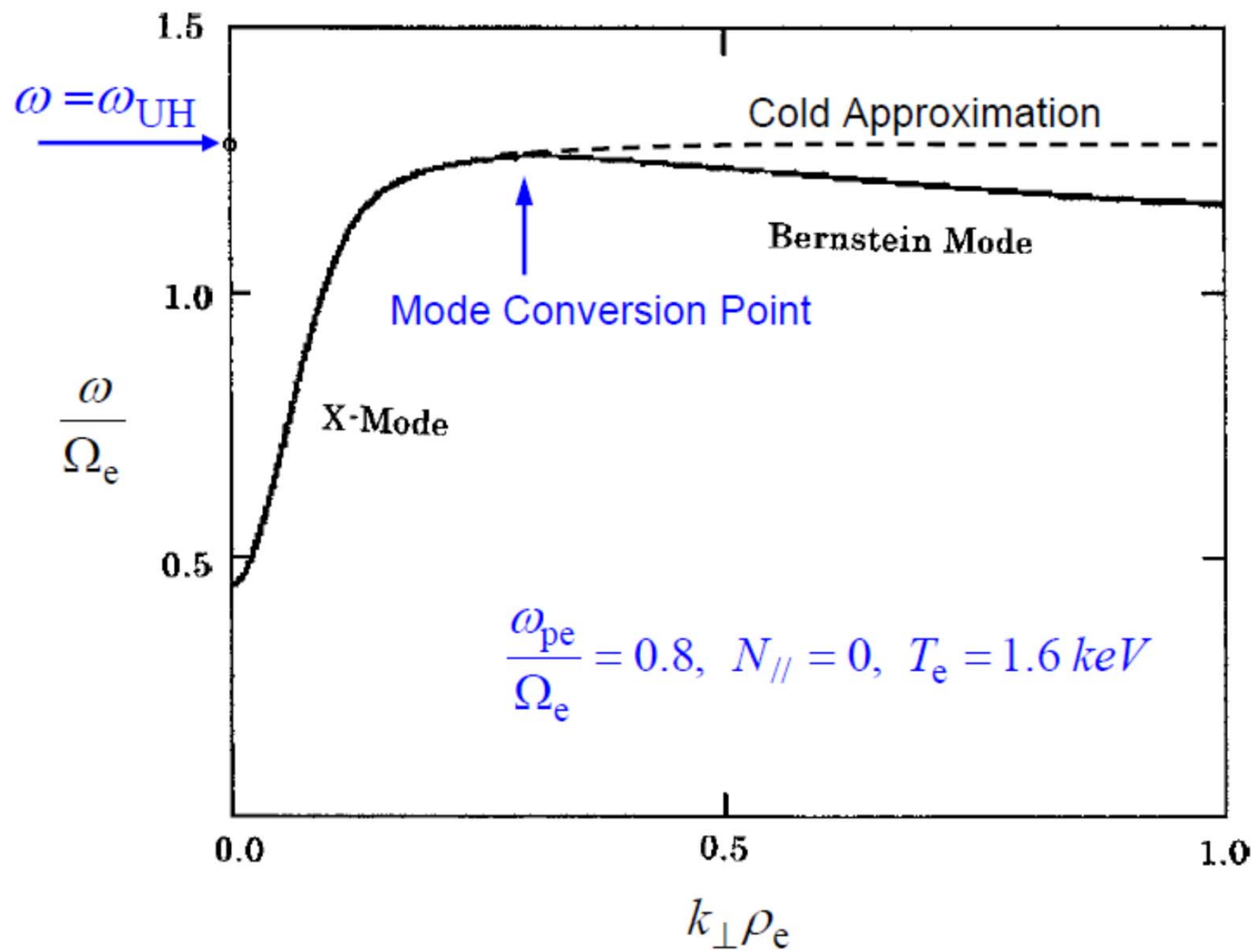
$\text{Im}(\omega/\omega_{ce})$ is from 0 to 0.01

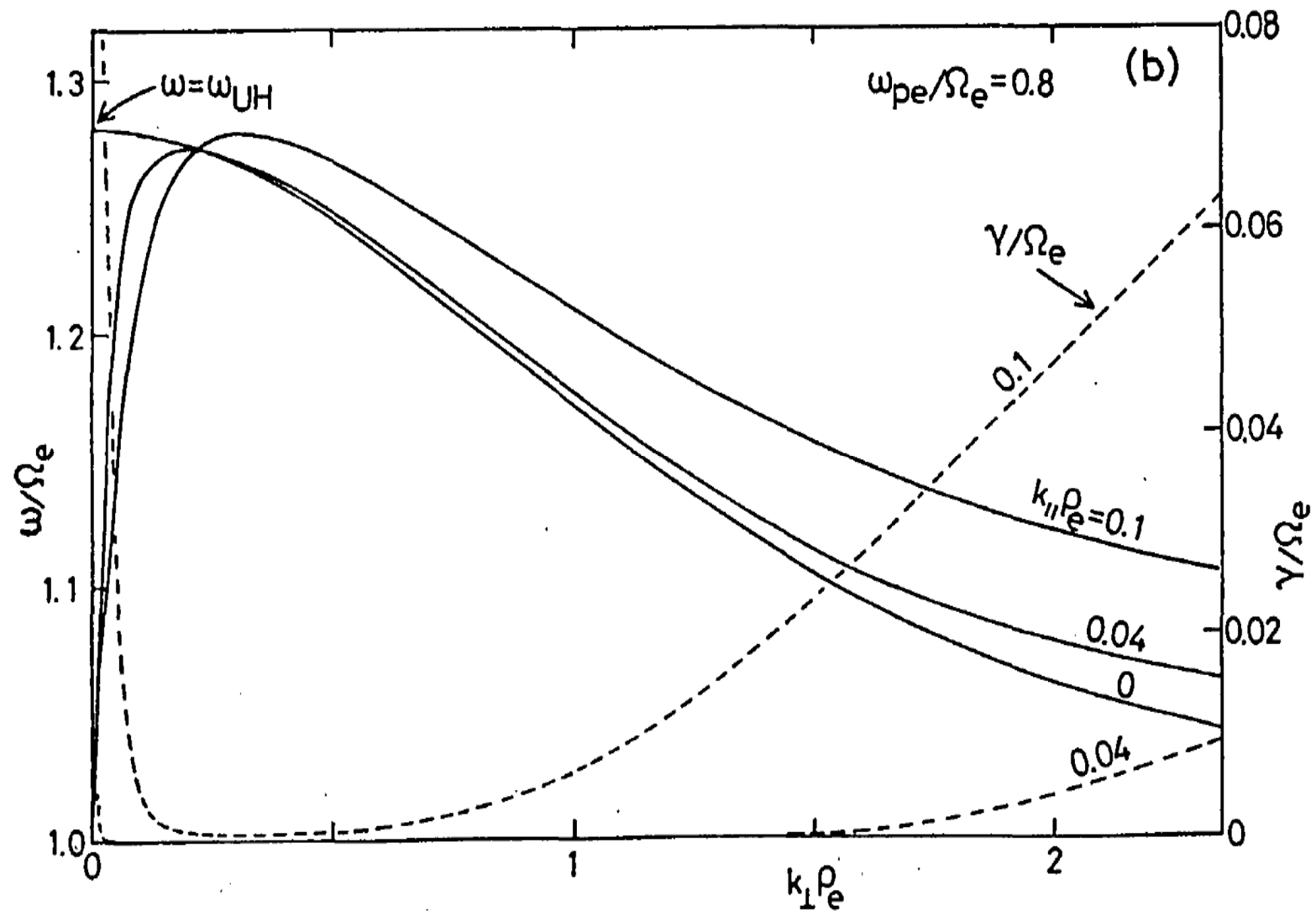
Max Harmonic Band = 04.

EB波の分散図

$k_{\parallel}\rho_e = 0.008, T_e = 10 \text{ eV} \quad (\omega_p/\Omega_e)^2 = 1.8$



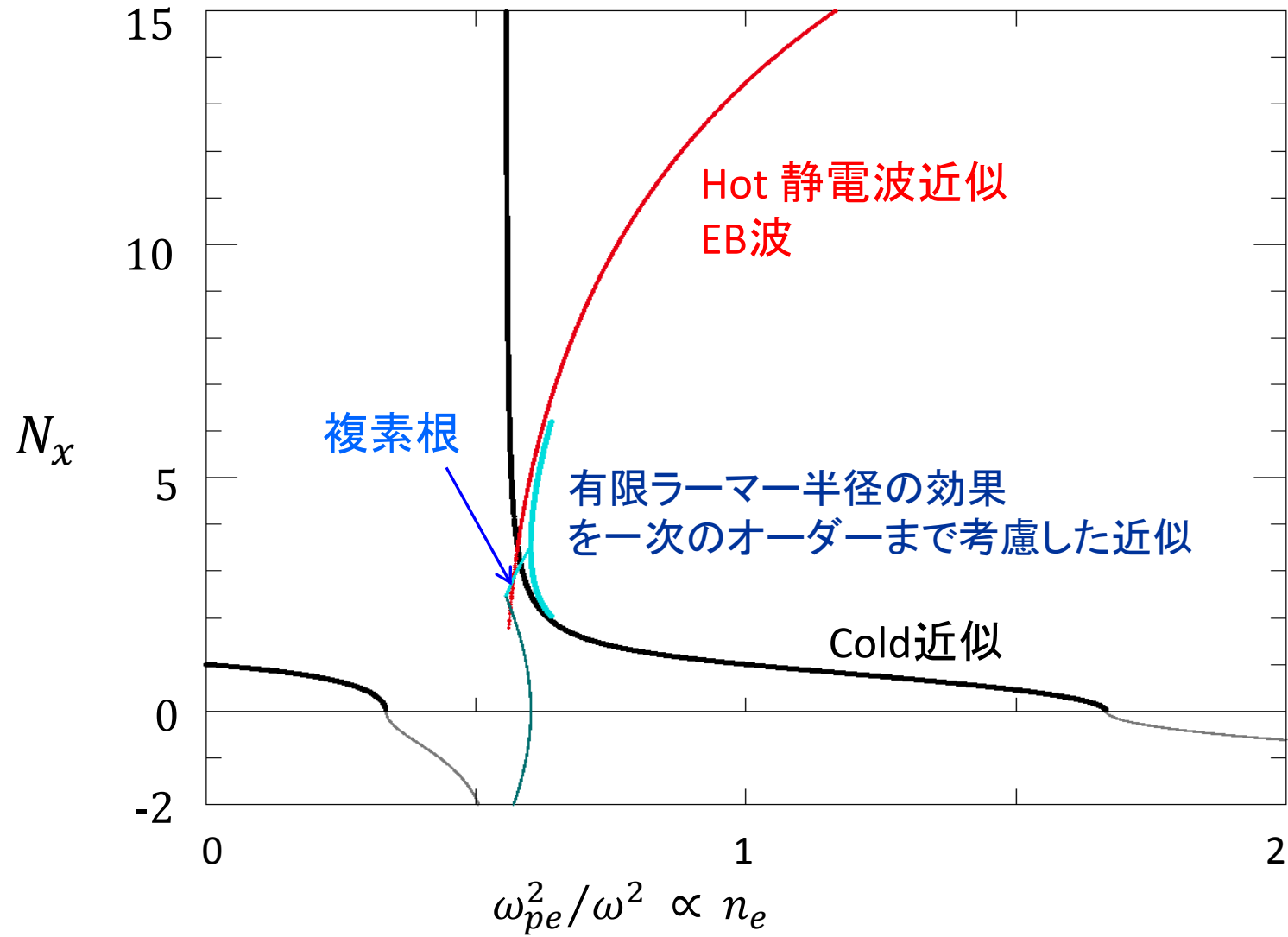




beta= 0.66667
nz0= 0.001

Te[eV]= 400.0

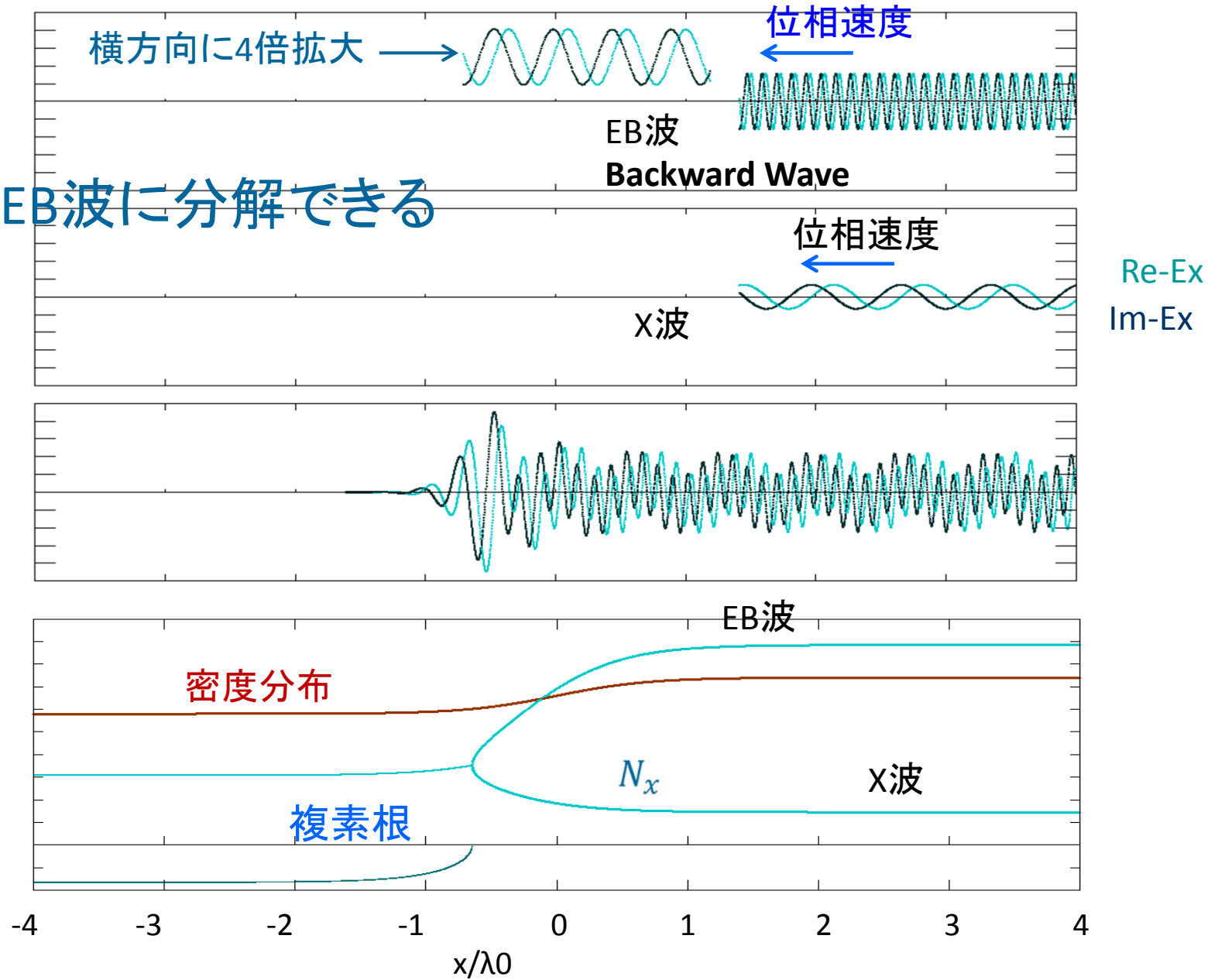
垂直伝播の場合



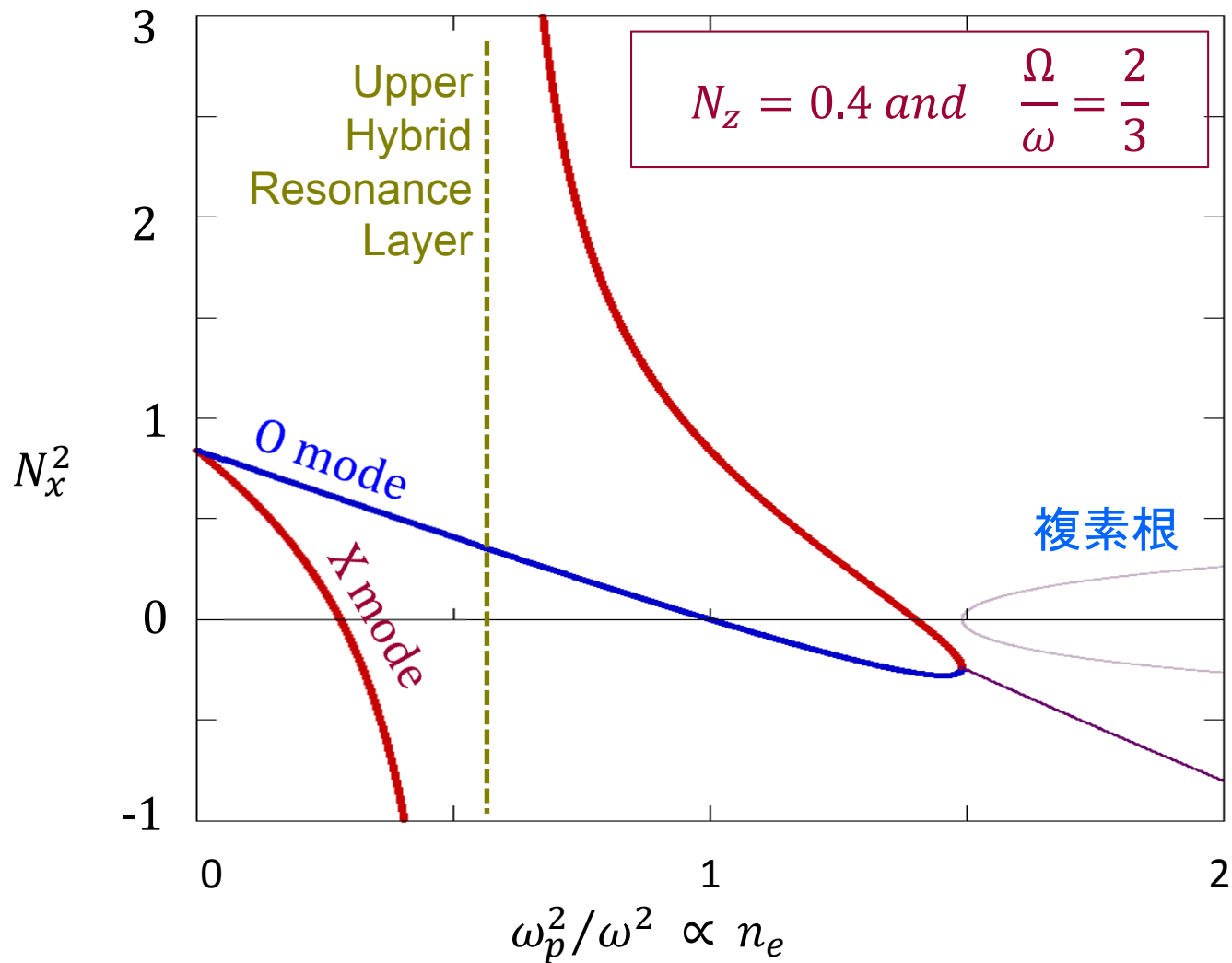
UHR層で無反射でX波からEB波にモード変換

beta= 0.66667 alphas= 0.58000 alpad= 0.16000
 Ln/rmd0= 0.700 Te[eV]= 400.0

X波とEB波に分解できる



N_z が有限であればO波で入射してもX波で入射してもそれぞれEB波に結合する。



最適偏波を求める手順

O波とX波の Constructive Interference により最適偏波を得る。

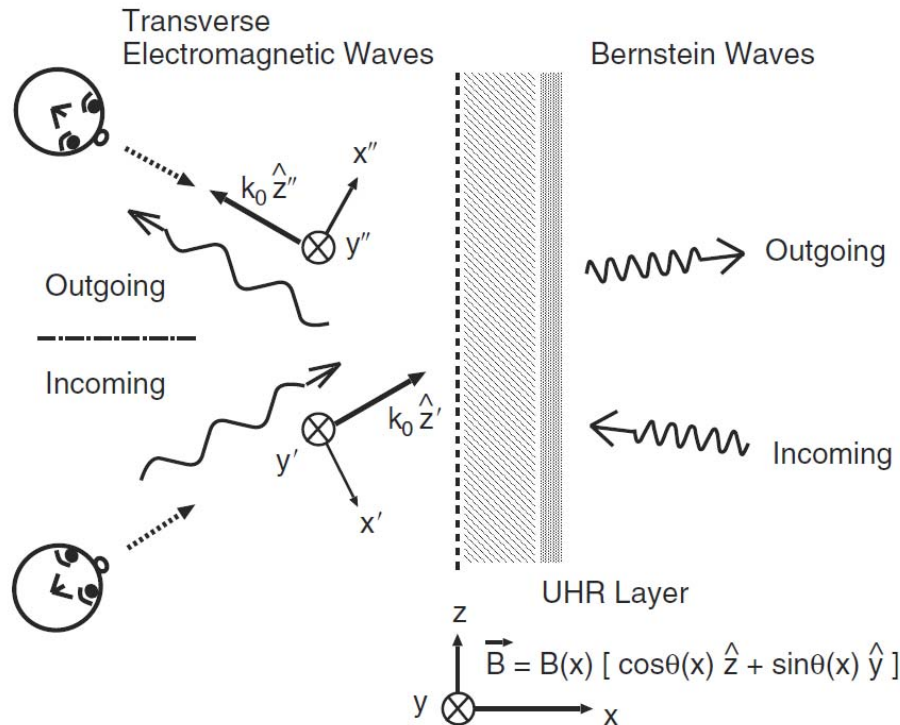
UHR層に近接するX波は無反射ですべてEB波にモード変換される。

電磁波の振る舞いについてはCold近似の波動方程式による共鳴吸収モデルが使用できる。

モード変換の散乱行列の特性を用いる。

散乱行列を用いたモード変換の解析

H. Igami et al. PPCF 46 261



Incoming

$$a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 \quad a_3 e_3$$

$$\vec{e}_1 = \exp(ik_0 z' - i\omega t) \hat{x}'$$

$$\vec{e}_2 = \exp(ik_0 z' - i\omega t) \hat{y}'$$

$$e_3 = \phi \exp(-ik_x x + ik_z z - i\omega t)$$

Outgoing

$$b_1 \vec{f}_1 + b_2 \vec{f}_2 \text{ and } b_3 f_3$$

散乱行列を用いて
流出波の振幅
 b_1 b_2 b_3 を
流入波の振幅
 a_1 a_2 a_3
で表す。

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

入射反射電磁波間の散乱行列を用いて 入射電磁波からEB波への散乱行列を書く

電力は保存するから: $\vec{S}^* \vec{S}^t = \vec{I}$.

時間反転解についての解析より :

$$S_{21} = -S_{12}, \quad S_{32} = -S_{23} \quad \text{and} \quad S_{31} = S_{13}.$$

以上より

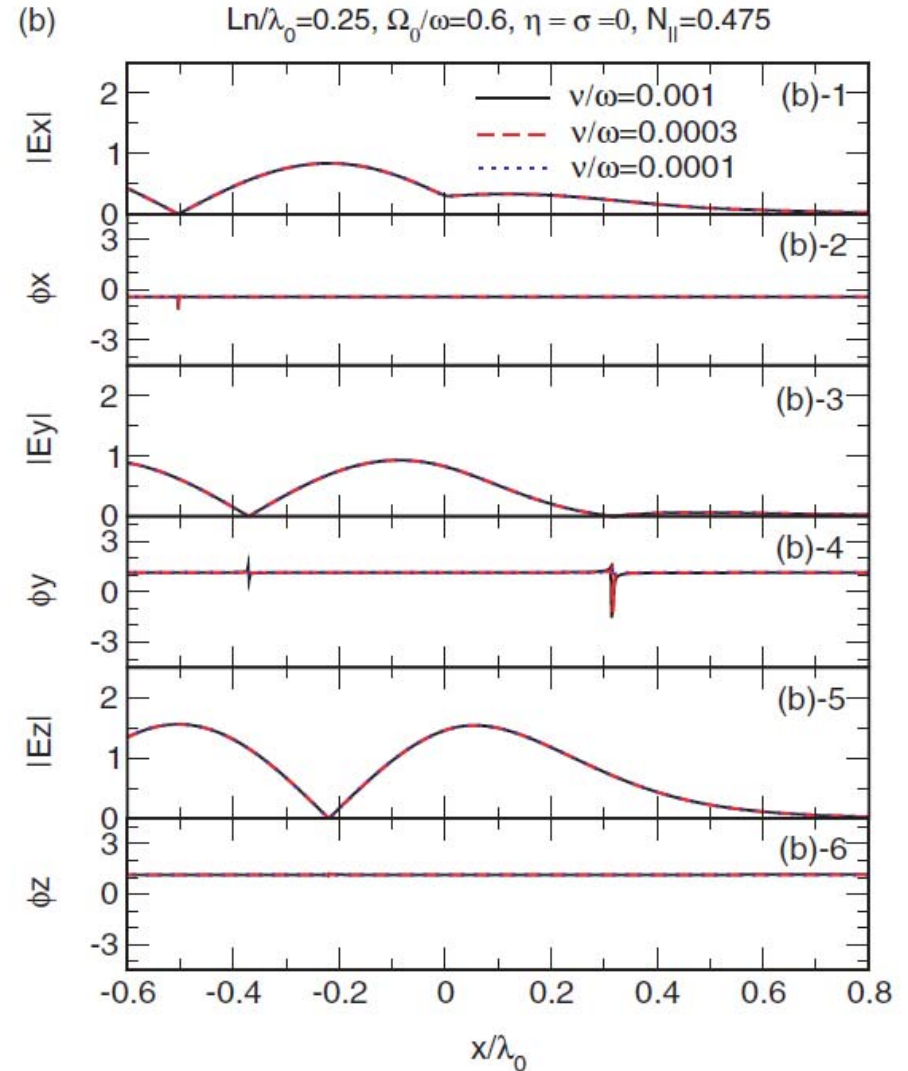
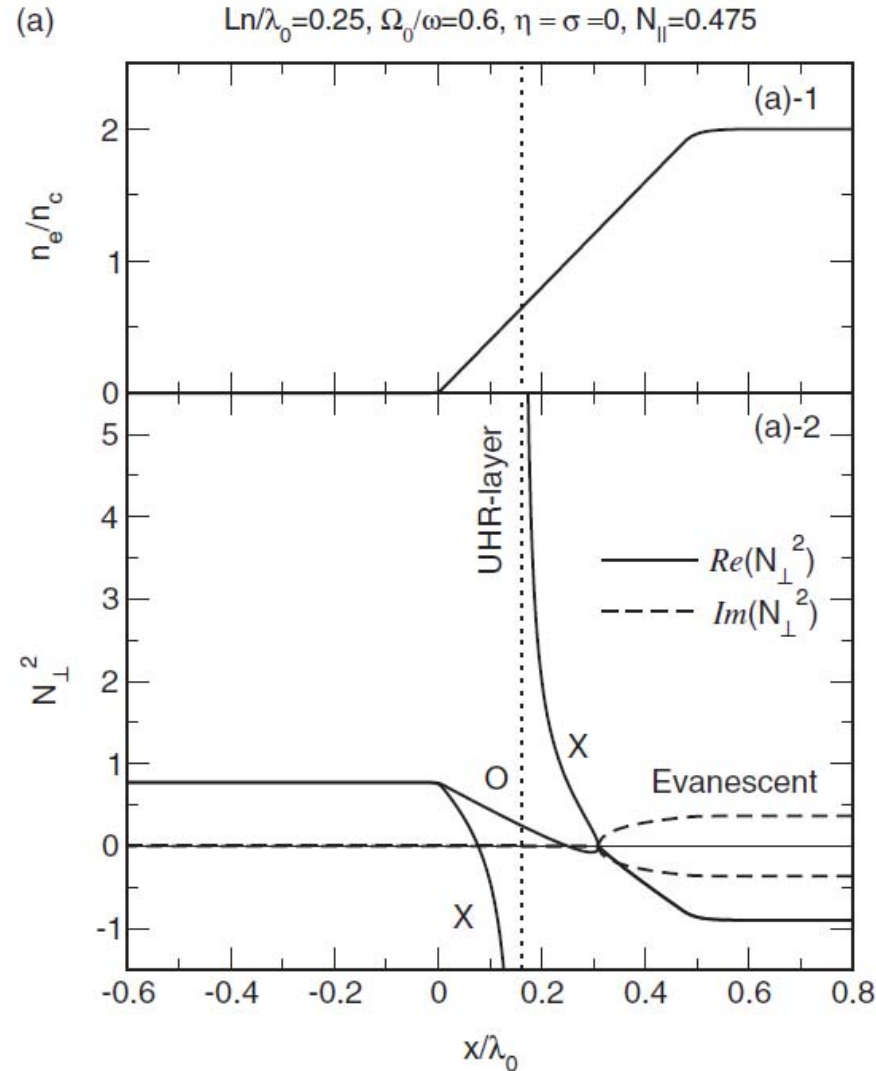
$$S_{31} = r_1 \exp(i\theta_1) \quad S_{32} = r_2 \exp(i\theta_2)$$

$$r_1 = \sqrt{1 - S_{11}S_{11}^* - S_{21}S_{21}^*}, \quad r_2 = \sqrt{1 - S_{12}S_{12}^* - S_{22}S_{22}^*}$$
$$\exp\{i(\theta_1 - \theta_2)\} = -(S_{11}S_{12}^* + S_{21}S_{22}^*)/r_1r_2.$$

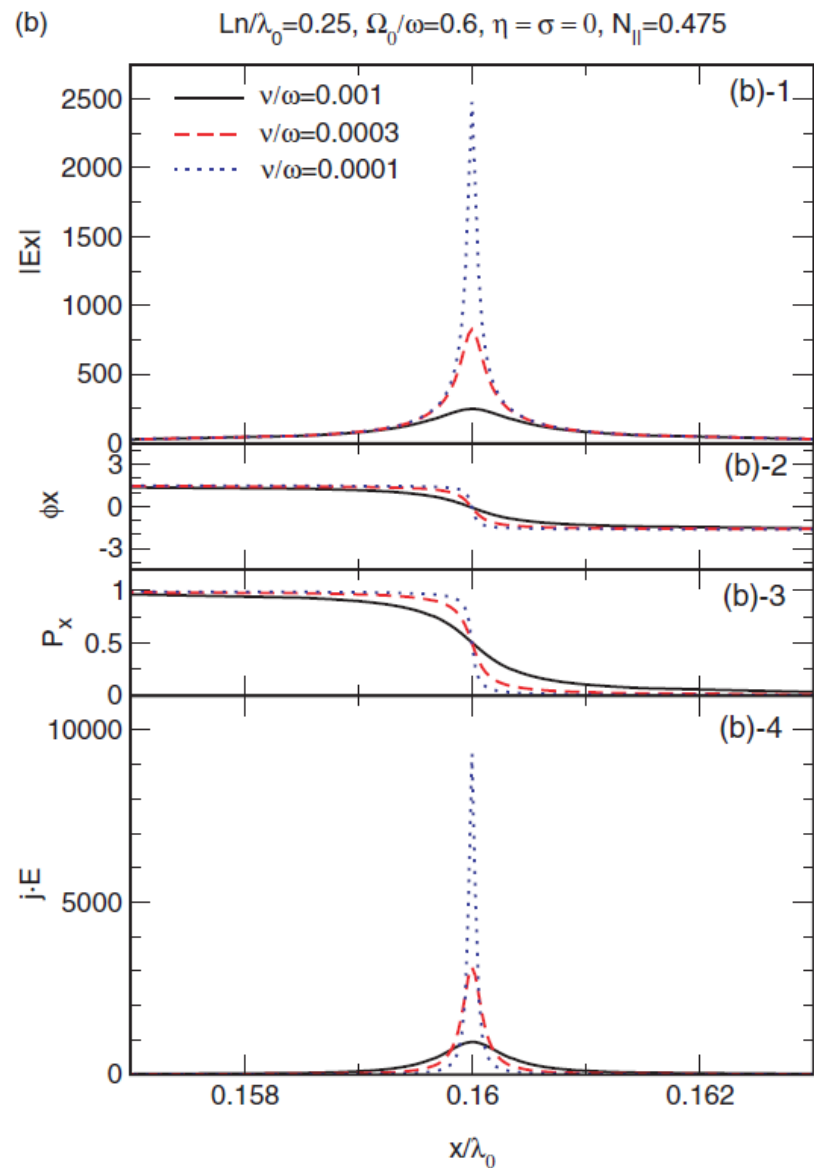
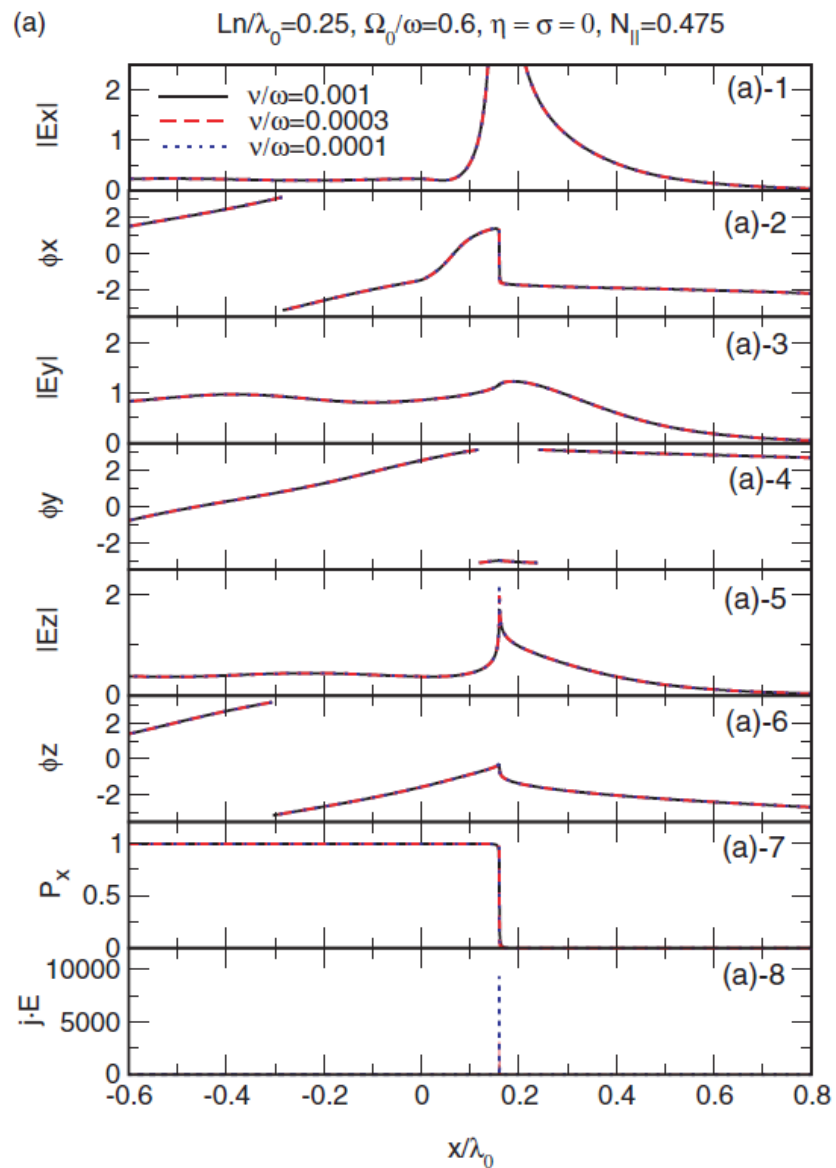
EB波の振幅は $b_3 = S_{31}a_1 + S_{32}a_2$

モード変換率は $\frac{b_3 b_3^*}{a_1 a_1^* + a_2 a_2^*}$

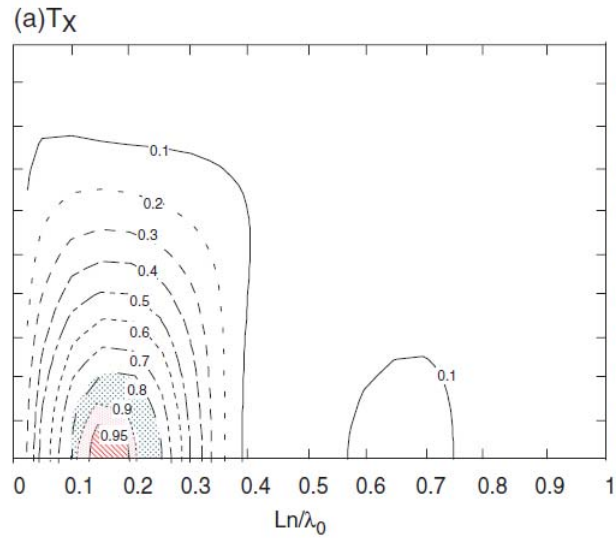
最悪偏波による入射の場合 Destructive Interference



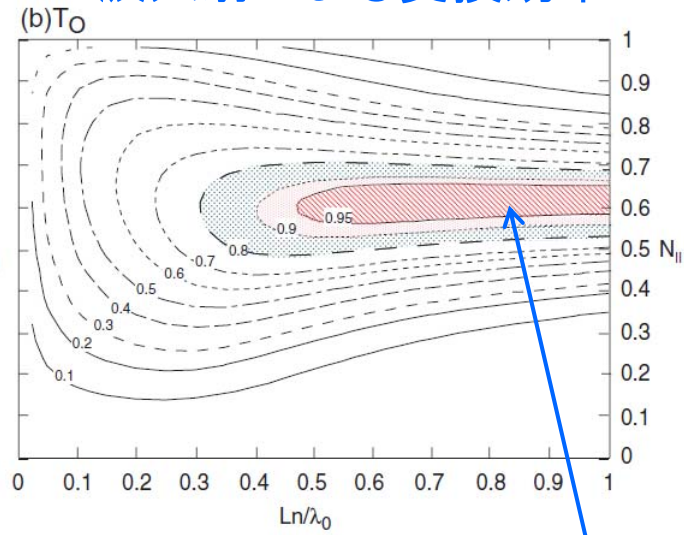
最適偏波による場合 Constructive Interference



X波入射による変換効率



O波入射による変換効率



OXB法の領域

最適偏波による
モード変換効率

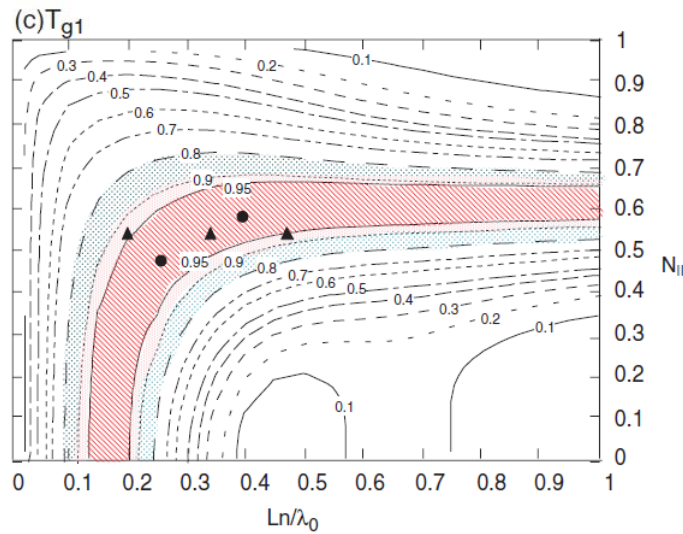


Figure 5. Contour plots of (a) T_X , (b) T_O and (c) T_{g1} ($= T_{EBE}$) on the two-dimensional space of L_n/λ_0 and N_{\parallel} . $\Omega_0/\omega = 0.6$, $\eta = \sigma = 0$.

- 1958 I. B. Bernstein Phys. Rev. **109** 10.
Electron Bernstein mode の発見 (Laplace transform method.)
- 1964 K. Mitani, H. Kubo, S. Tanaka J. Phy. Soc. Jpn. **19** 211.
バンドスペクトル ($\omega = n\Omega_e, \omega_{UH}$) の検出
- 1965 T. H. Stix PRL Vol.15 p878
X波からEB波へのモード変換の解析
- 1973 Preinhaelter J and Kopecky V *J. Plasma Phys.* **10** 1.
OXB法の提案と解析 オーバーデンスプラズマのEB波加熱
- 1977 J. Hosea et al. PRL **39** 408
強磁場側に向かったのBX放射の検出 (PLTトカマク)
- 1978 T. Maekawa, S. Tanaka, Y. Terumichi, Y. Hamada PRL **40** 1379.
OXBの光線軌道計算
- 1981 H. Sugai PRL **47** 1899
X波からEB波へのモード変換 (XB法) の検証 (直線装置)

- 1988 S.Nakajima, H. Abe Phys Rev A **38** 4373. 粒子コードによるXB法の研究
- 1997 H. P. Laqua *et al.*, PRL **78**, 3467 OXB法加熱(W7ASステラレータ)
- 1998 Laqua H P and Hartfuss H J PRL **81** 10
BXO放射の検出(W7ASステラレータ)
- 2001 T. Maekawa *et al.* PRL **86** 3783
複素定振幅(位相を含む)
XB法加熱とEB波 $N_{//}$ アップシフト(WT3トカマク)
- 2004 H. Igami *et al.* PPCF **46** 261 入射偏波調整法の提案と解析
- 2012 M. Uchida *et al.* FEC2012 EX/P6-18 EBWによるSTプラズマの保持
- 2012 A. Fukuyama US-J RF Workshop at Nara
Integral formulation of conductivity tensor for EBW propagation
- 2013 Y. Yoshimura *et al.* Nuclear Fusion **53** 063004
強磁場側XB法加熱(LHD)

バンドスペクトル($\omega = n\Omega_e, \omega_{UH}$)の検出

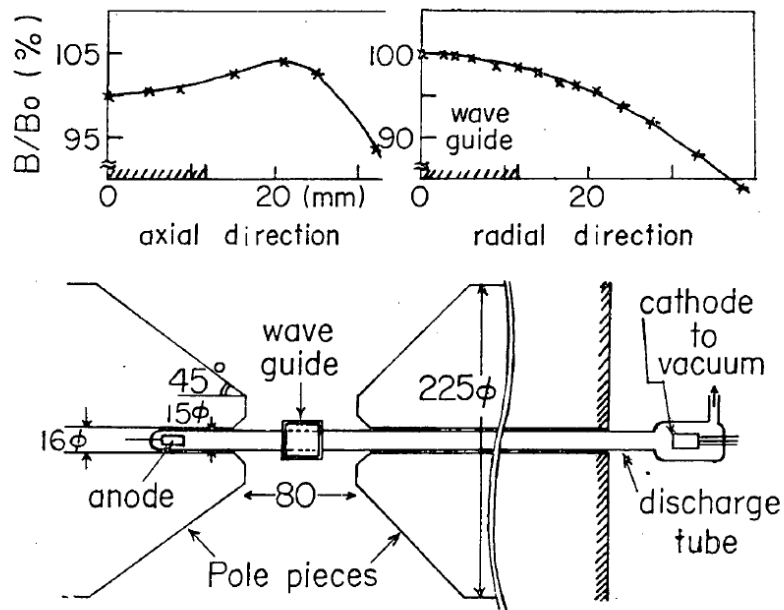


Fig. 3. Magnet and discharge tube assembly.

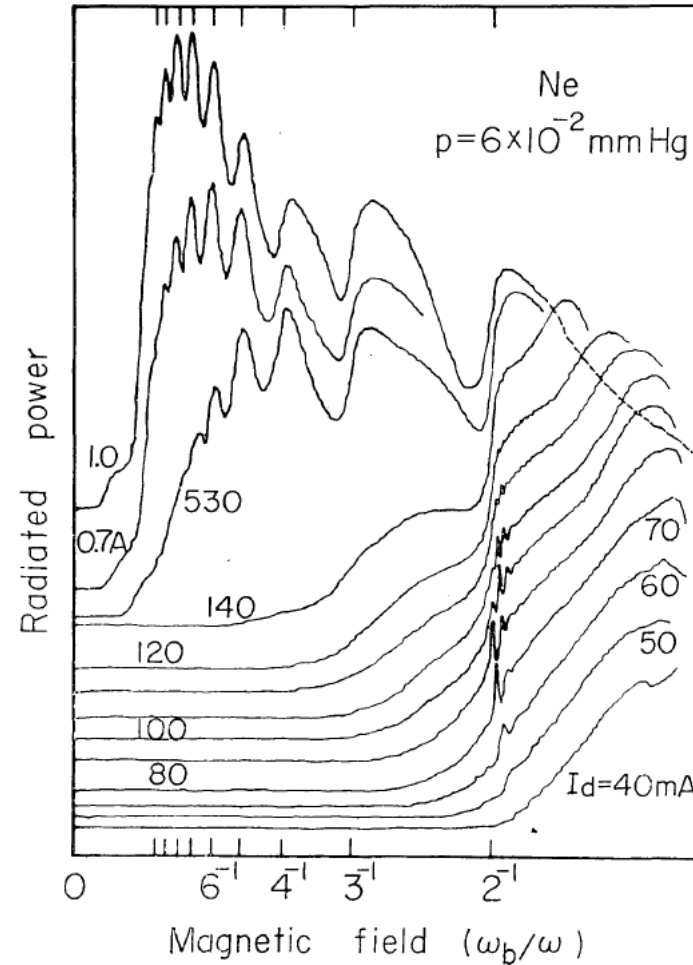


Fig. 13. Radiation patterns on Ne ($p=6 \times 10^{-2}$).

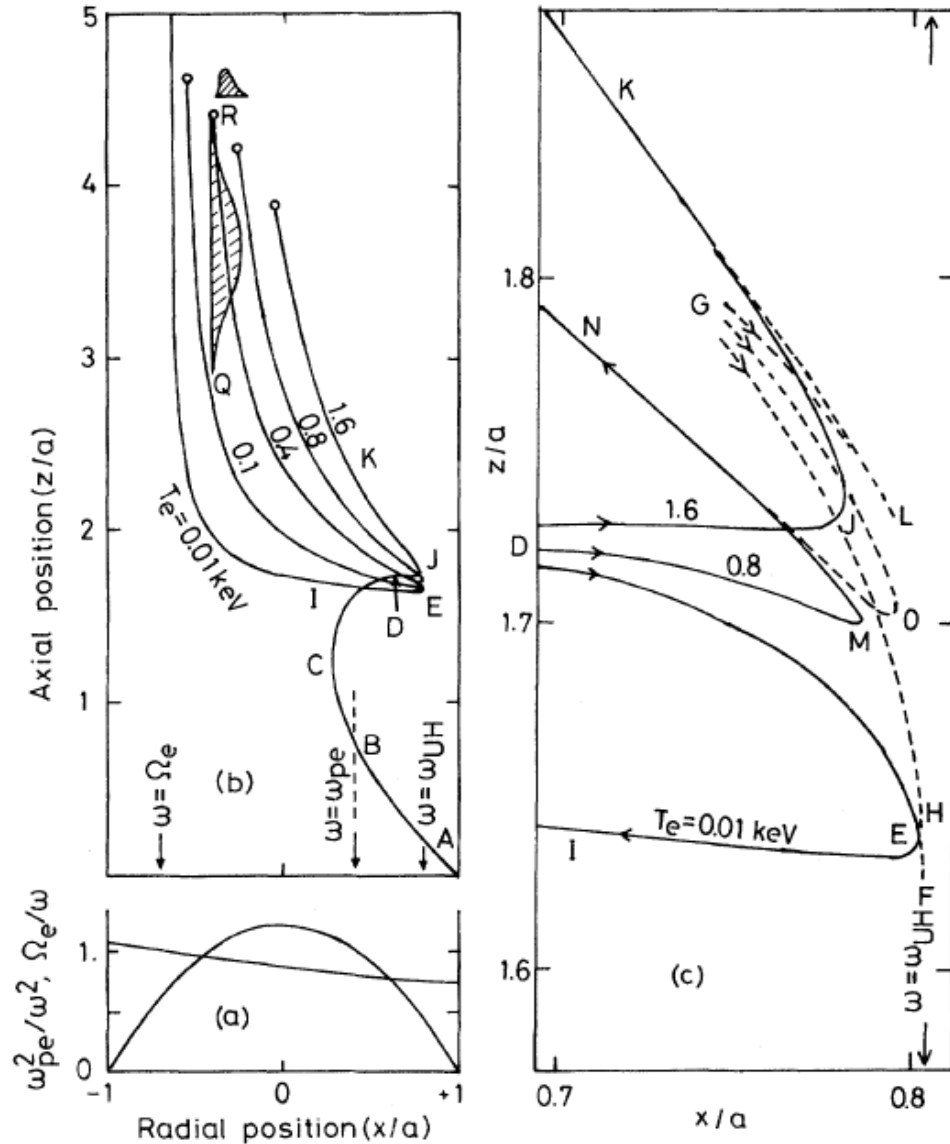


FIG. 3. (a) Electron density and field intensity variations in a toroidal plasma. $\omega_{pe}^2(0)/\omega^2 = 1.21$, $\Omega_e(0)/\omega = 0.87$, and $R/a = 91/17$ [for example, $\Omega_e(0)/2\pi = 35$ GHz, $k_z = 5.63$ cm $^{-1}$, $a = 17$ cm] and electron-ion collision frequency $\nu/\omega_{pe}(0) = 5.2 \times 10^{-5}$, 2.1×10^{-6} , 3.0×10^{-7} , 4.2×10^{-8} for $T_e = 0.01, 0.1, 0.4, 0.8,$ and 1.6 keV, respectively. (b), (c) Wave trajectories for $N_z = N_{z,opt} = 0.668$ at $\omega = \omega_{pe}$ in toroidal plasma. For $T_e = 10$ eV, the exact trajectory is shown by the curve *ABCDEI*, the trajectory of the cold X mode by the curve *ABCDF*, and that of the Bernstein mode by the curve *GHI*. The exact trajectories are shown by curves *ABCDMN* and *ABCDJK* for $T_e = 0.8$ and 1.6 keV, respectively.

X波からEB波へのモード変換(XB法)の検証 (直線装置)

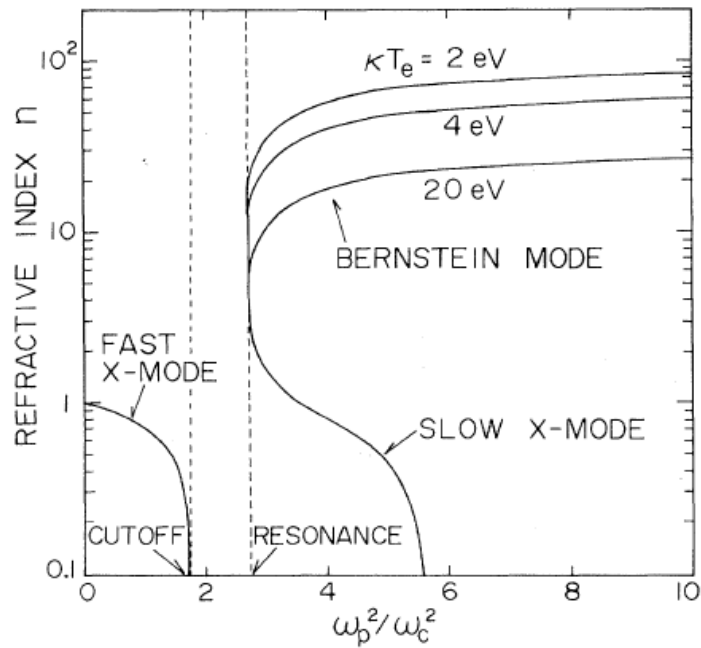


FIG. 1. Refractive index n vs ω_p^2/ω_c^2 for $\omega/\omega_c = 1.9$.

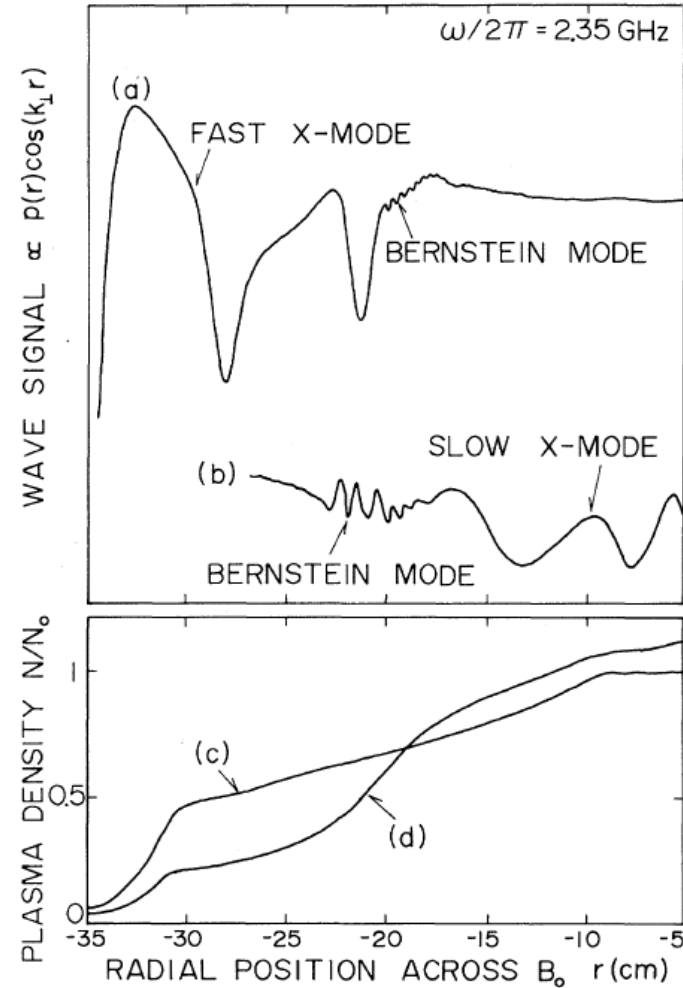


FIG. 2. Interferometer traces for the microwave incident (a) from outside the plasma at $\omega/\omega_c = 1.95$, and (b) from within the plasma at $\omega/\omega_c = 1.97$, together with (c) gentle and (d) steep radial profiles of the plasma density.

粒子コードによるXB法の研究

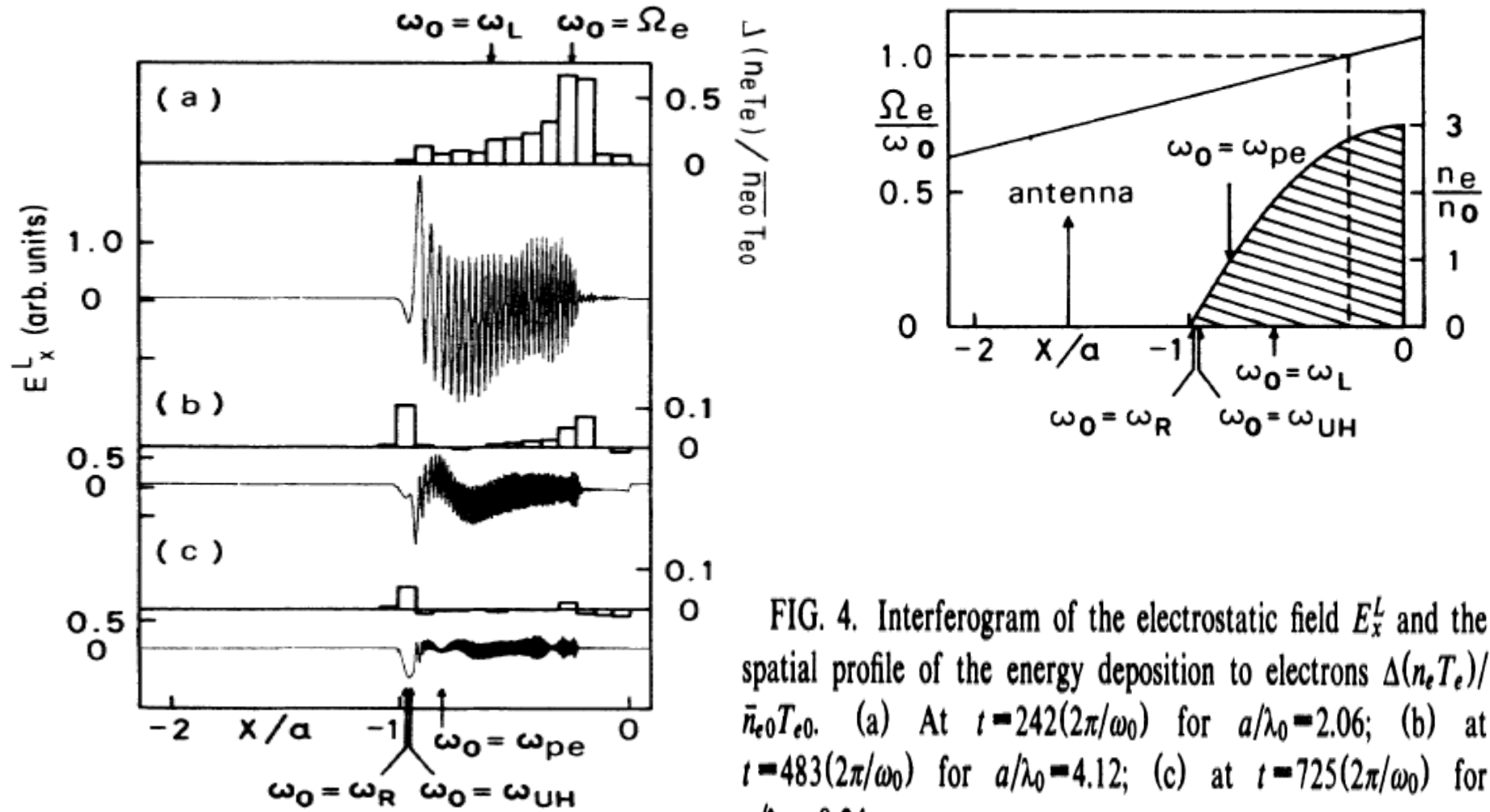


FIG. 4. Interferogram of the electrostatic field E_x^L and the spatial profile of the energy deposition to electrons $\Delta(n_e T_e) / \bar{n}_e T_{e0}$. (a) At $t = 242(2\pi/\omega_0)$ for $a/\lambda_0 = 2.06$; (b) at $t = 483(2\pi/\omega_0)$ for $a/\lambda_0 = 4.12$; (c) at $t = 725(2\pi/\omega_0)$ for $a/\lambda_0 = 8.24$.

1997 H. P. Laqua *et al.*, PRL **78**, 3467
 OXB法加熱(W7ASステラレータ)

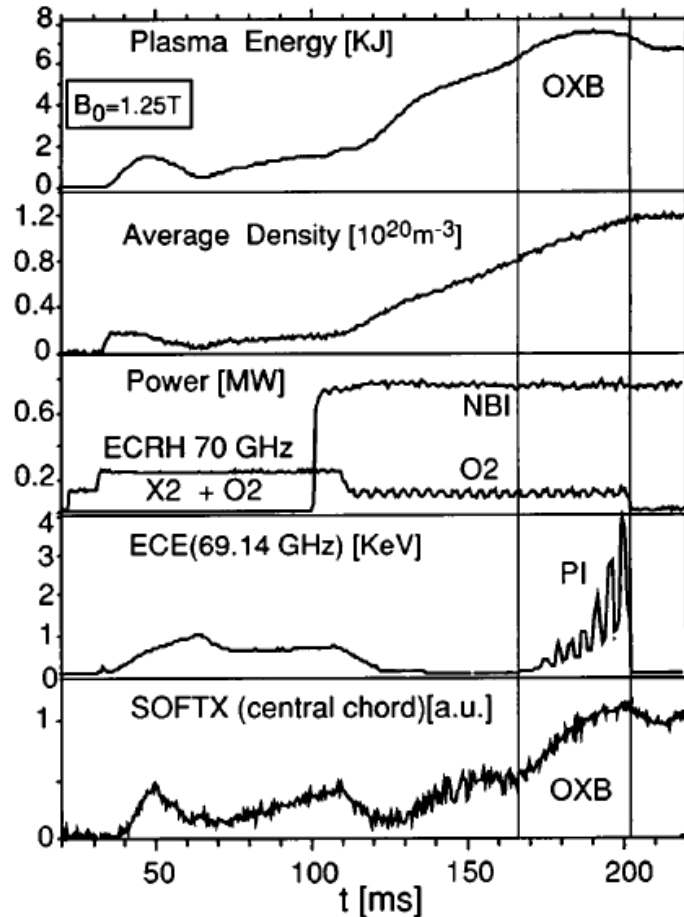


FIG. 6. Temporal development of some plasma parameter during a O-X-B heated discharge. From the top: plasma energy estimated from the diamagnetic signal, average density from the interferometric measurement, heating power, intensity of ECE and PI, and central soft X signal. The markers show the O-X-B-heating interval.

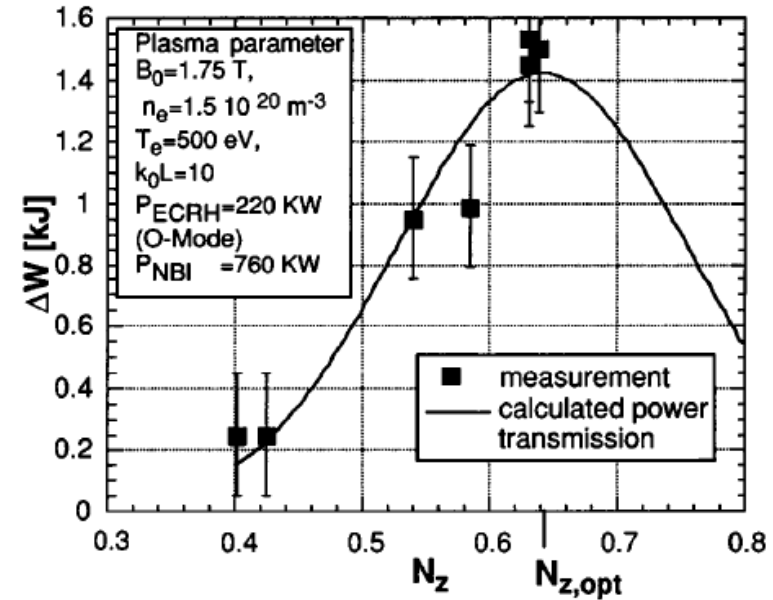


FIG. 4. Increase of the plasma energy content by O-X-B heating versus the longitudinal vacuum refractive index N_z of the incident O wave. The solid line is the calculated transmission function multiplied by the maximum energy increase.

XB法加熱とEB波 N_{\parallel} アップシフト(WT3トカマク)

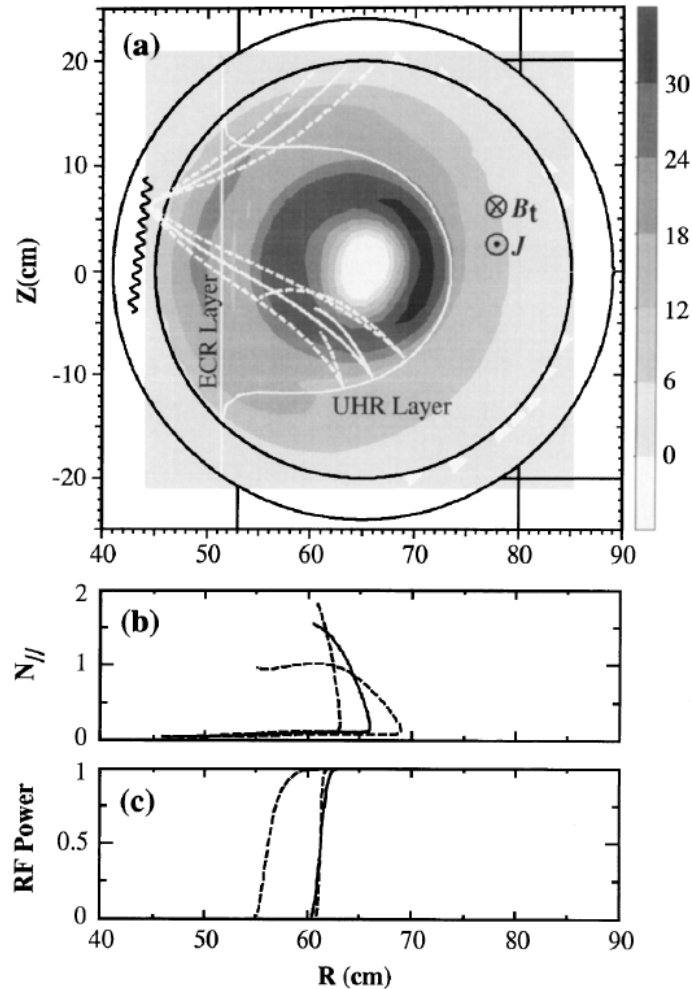


FIG. 3. Incremental SX image at the onset of B wave heating, and the ray trajectories. Variation of (b) N_{\parallel} and (c) wave power along the trajectories. Dotted lines are for peripheral rays and the solid line is for the central ray. Calculation parameters are $n_0 = 2.16 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $T_0 = 480 \text{ eV}$, $I_p = 60 \text{ kA}$, $\nu_n = 2$, $\nu_T = 3$, and $\nu_J = 4.5$.

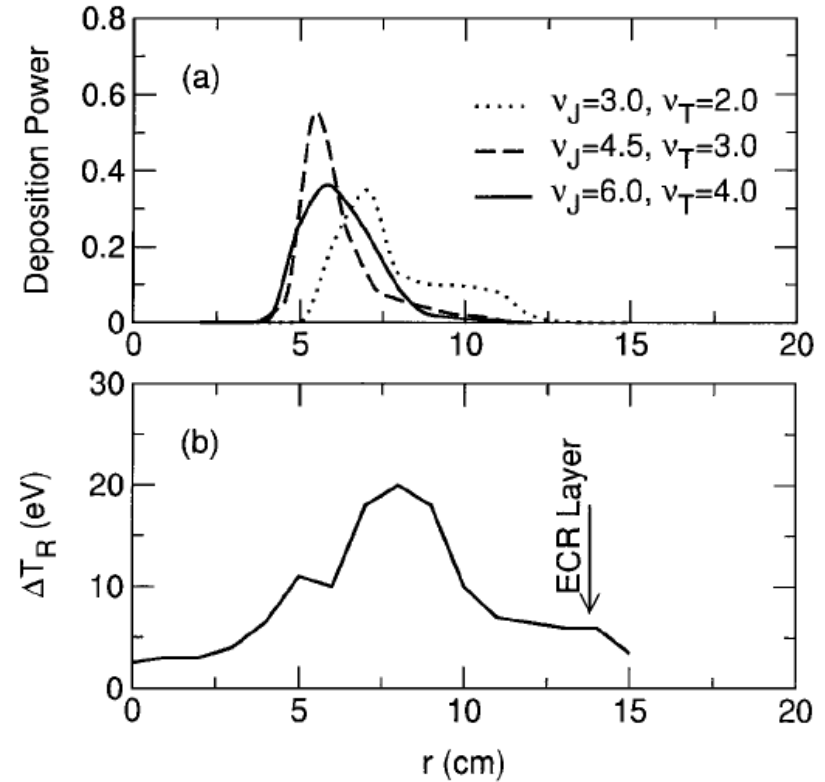


FIG. 5. Radial profiles of (a) B wave power deposition from multiray calculation and (b) incremental ECE radiation temperature. Calculation parameters are $n_0 = 2.16 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $T_0 = 480 \text{ eV}$, $I_p = 60 \text{ kA}$, and $\nu_n = 2$.

EBWによるSTプラズマの保持(中心密度は遮断密度の10倍)

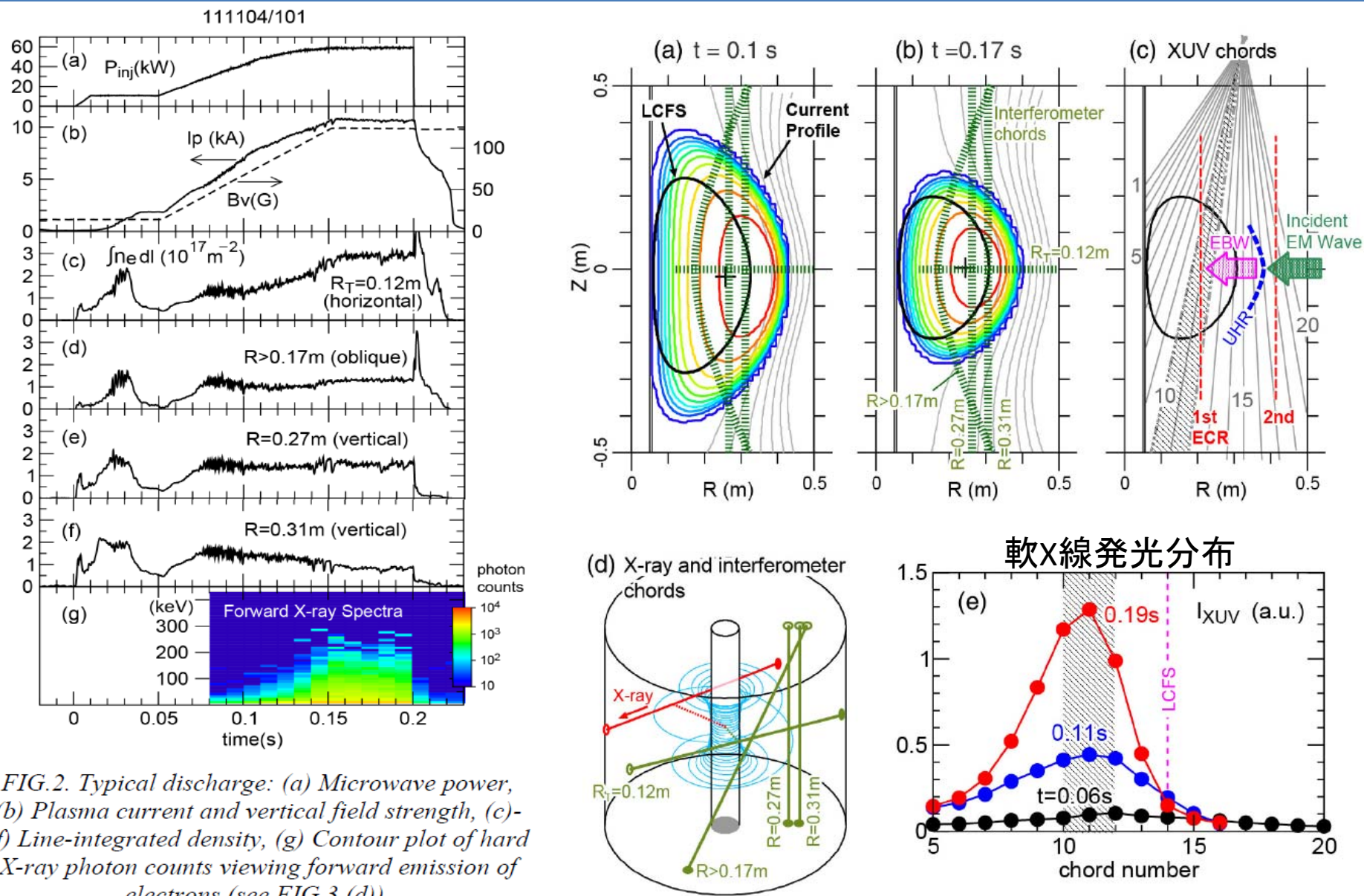
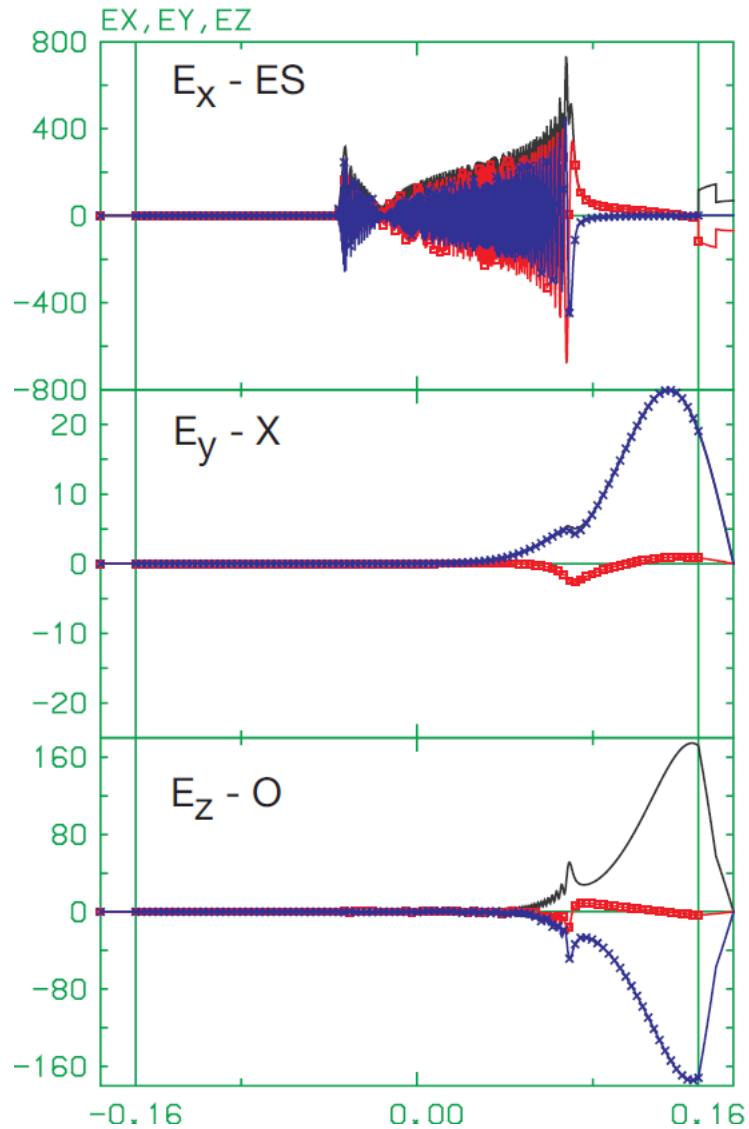
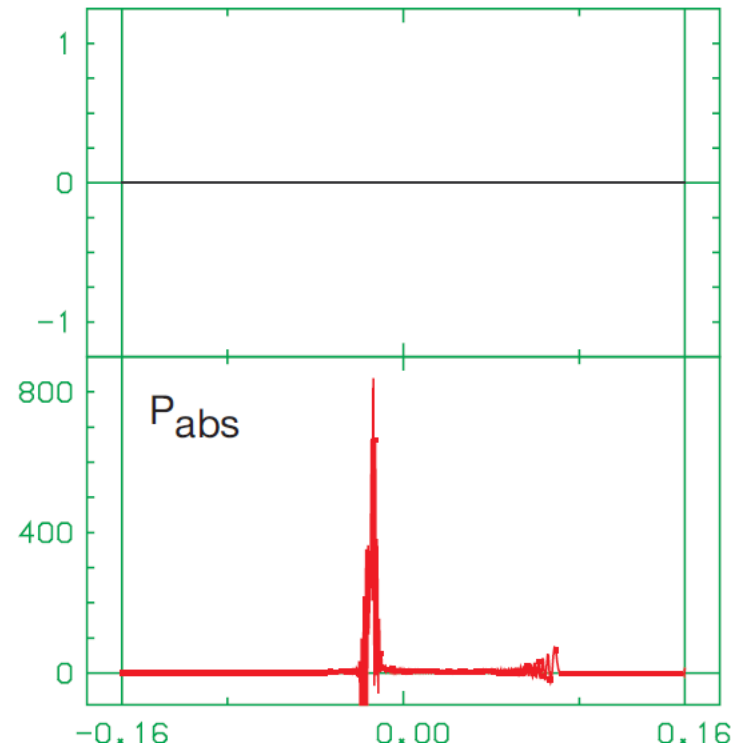


FIG.2. Typical discharge: (a) Microwave power, (b) Plasma current and vertical field strength, (c)-(f) Line-integrated density, (g) Contour plot of hard X-ray photon counts viewing forward emission of electrons (see FIG.3.(d)).

2012 A. Fukuyama US-J RF Workshop at Nara
Integral formulation of conductivity tensor for EBW propagation



FREQ =2450.0000 K-PR = 24.0000
B = 0.0800 WALLR= 0.0E+00
J-HI = 0.0000/ 0.0000 0.0000
J-LO = 0.0000/ 0.0000 0.0000
IS1
N-20 = 0.002
T-PP = 0.200
T-PR = 0.200
P/TOT= 2.403
PTOT = 2.4029 JTOT = 0.0000



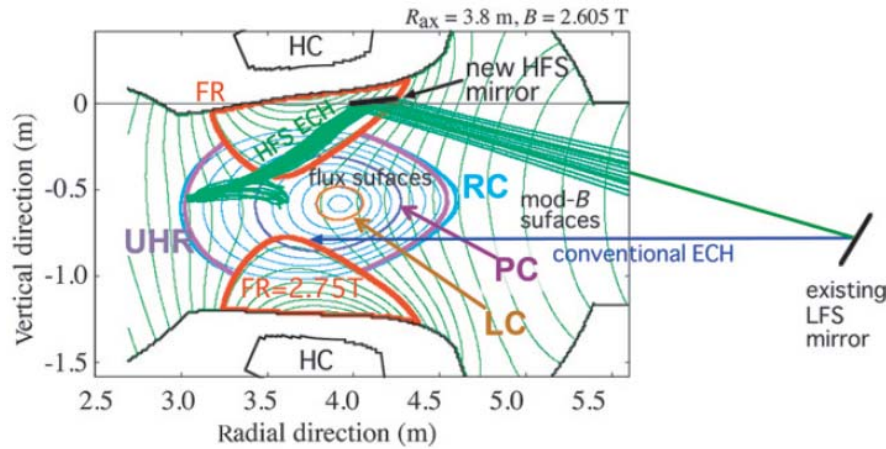


Figure 1. Schematic view of the configuration of EC-wave injection from the equatorial 2-O port. HC, LC, PC, RC, FR and UHR denote the helical coil, left-hand cut-off, plasma cut-off, right-hand cut-off, fundamental electron cyclotron resonance layer and upper-hybrid resonance layer, respectively. Used plasma parameters are those of discharge #108276 at $t = 5$ s.

